

Efeitos de Auto-interação na Dinâmica de um Corpo no Espaço-tempo

Paulo Miguel Grilo da Luz

Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em
Engenharia Física Tecnológica

Júri

Presidente: Doutora José Sande Lemos

Orientador: Doutor Vitor Cardoso

Vogal: Doutor Jan Steinhoff

Outubro 2012

Agradecimentos

Aproveito esta secção para agradecer por todo o tempo e atenção que o meu orientador, Vitor Cardoso, disponibilizou no desenvolvimento desta tese. Um obrigado sincero pelos seus comentários e sentido crítico que sempre, espero, me levaram ao sítio certo.

Um grande obrigado a todos os meus amigos que sempre me apoiaram, pela sua enorme compreensão e pelos grandes momentos passados e a haver. Obrigado Jorge por teres a extrema capacidade de me deixares bem disposto, pelas longas noites de verão e por todo o teu apoio; e Tânia pelas infinitas risadas e gargalhadas.

À minha família deixo, não um obrigado, mas um sem palavras, pelo vosso enorme apoio e sacrifício que me permitiram alcançar os meus objetivos, melhor educação e com certeza crescimento como ser humano, palavras não seriam suficientes para agradecer e vos indicar o quão grato estou por tudo.

Por fim, Nádía, obrigado pelo teu apoio incondicional e dedicação permanente. É a tua habilidade para me deixar feliz que me instiga a continuar.

Resumo

Na presente dissertação é estudado o fenómeno de auto-interação de partículas com o campo por elas criado.

Começa-se por introduzir a primeira tentativa de quantificação do efeito de auto-interação, que em termos históricos, aparece no estudo do eletromagnetismo a partir das equações de Maxwell. Faz-se então a dedução da equação de Larmor para partículas aceleradas com carga elétrica, cuja inclusão nas equações do movimento da partícula implica uma correção à equação de Lorentz, obtendo-se a expressão para a Força de Abraham-Lorentz.

O estudo da força de Abraham-Lorentz revela que esta apresenta várias patologias como o aparecimento de interações acausais e acelerações infinitas. Prossegue-se então a análise dos efeitos de auto-interação no eletromagnetismo de Maxwell utilizando o formalismo da relatividade restrita. Escrevem-se as expressões de uma forma covariante para o campo eletromagnético e, com os resultados encontrados, faz-se a dedução da Força de Abraham-Lorentz-Dirac, a qual se reduz à equação obtida no formalismo clássico, apresentando as mesmas patologias e revelando, em última instância, os limites de aplicabilidade da física clássica.

No terceiro capítulo introduzem-se as ferramentas matemáticas necessárias ao estudo dos efeitos de auto-interação em espaços-tempo curvos.

Os novos conceitos são então utilizados para calcular a deformação do espaço-tempo criada por uma partícula pontual com massa, revelando que esta diverge na posição da partícula. De modo a fazer sentido dos resultados obtidos aplica-se um método de regularização do campo, permitindo assim, deduzir a equação do movimento para uma partícula pontual com massa num espaço-tempo curvo.

Por fim, aplica-se o resultado obtido ao caso mais simples e estuda-se a existência de efeitos de auto-interação em espaço-tempo aproximadamente plano, revelando que neste caso, em primeira ordem de teoria de perturbações, a partícula segue uma geodésica.

O estudo da *self-force* em espaços-tempo curvos segue a Ref.[55].

Palavras-Chave: Força de Abraham-Lorentz-Dirac; Reação de Radiação; Auto-interação; Espaços-tempo Curvos.

Abstract

In this thesis we study the effect of self-interactions of particles with their own field.

We start by introducing the first attempt to quantify the effect of self-forces which, historically, appears in the study of electromagnetism. We deduce the Larmor equation for accelerated charged particles, whose introduction in the equations of motion implies a correction to the Lorentz force, the Abraham-Lorentz force.

The study of the Abraham-Lorentz force shows various problems like violation of causality or infinite accelerations. We then continue with the study of the electromagnetic self-force within the special relativity framework. We find the fully covariant expression for the electromagnetic field and, with this results, we deduce the Abraham-Lorentz-Dirac force, which reduces to the equation found in the classical framework having the same problems as the previous one and showing, ultimately, the limitations of classical physics.

In the third chapter we introduce the mathematical tools that shall be needed to study the effects of self-force in curved space-times.

The new concepts are then used to compute the deformation in space-time created by a massive point particle, finding that it diverges in the particle's position. To make sense of this results we use a method to regularize the field, which then allows us to find the equation of motion for a massive point particle in curved space-time.

To finish, we use the equation found in the simplest case and study the self-force effects in flat space-time, concluding that the particle's world line is a geodesic in first order of perturbation theory.

The study of self-force in curved space-time closely follows Ref.[55].

Keywords: Abraham-Lorentz-Dirac Force; Radiation Reaction; Self-force; Curved Space-time.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
2 Reação de Radiação	2
2.1 Equações de Maxwell	2
2.2 Funções de Green	3
2.3 Potenciais e Campos Retardados	7
2.4 Potência Radiada por uma Carga Pontual	10
2.5 Força de Abraham-Lorentz	11
2.6 Conclusões	12
3 Força de Abraham-Lorentz-Dirac	14
3.1 Notação Tensorial	14
3.2 Quadripotencial Retardado	16
3.3 Mapeamento do Cone de Luz	19
3.4 Coordenadas Retardadas	21
3.5 Força de Abraham-Lorentz-Dirac	23
4 Ferramentas Matemáticas em Espaços-tempo Curvos	28
4.1 A Função de Synge	28
4.2 Limites de Coincidência	30
4.3 Propagador Paralelo	31
4.4 Expansão Covariante	33
4.5 Determinante de Van Vleck	35
4.6 Distribuições em Espaço-tempo Curvo	36
4.7 Coordenadas Retardadas em Espaço-tempo Curvo	38
5 Força de Reação em Espaços-tempo Curvos	43
5.1 Equação das Ondas	43
5.2 Formulação Integral das Equações de Campo	46
5.3 Construção das Funções de Green	47
5.4 Dinâmica de uma Partícula Pontual em Espaço-tempo Curvo	50
5.5 Potenciais Retardados	53
5.6 Equação do Movimento	57
5.7 Resultados e Conclusões	57
6 Conclusões e Futuro	59
A Cálculo dos Campos Elétrico e Magnético Retardados	61
B Regra de Synge	64

C Transporte de Fermi-Walker	65
Referências	66

Lista de Figuras

2.1	Representação da relação causal entre a emissão do campo eletromagnético e a sua medição.	7
3.1	Representação gráfica do sistema de coordenadas retardadas em espaço-tempo plano. .	22
3.2	Tubo do mundo Σ que envolve a linha do mundo da partícula.	24
4.1	Representação gráfica do sistema de coordenadas retardadas.	42
5.1	Representação da função de Green Retardada.	48

1 Introdução

No início do século XX apenas eram conhecidos dois tipos de interações: gravitacional e eletromagnética. Somente a teoria do eletromagnetismo de Maxwell previa que a interação se propagava a uma velocidade finita. Este facto implica que uma partícula carregada, quando sujeita a uma força exterior, exerce sobre si mesma uma força de reação que perturba o seu movimento. A esta correção dá-se o nome de efeito de auto-interação ou *self-force*.

A interação gravitacional era na altura descrita pela teoria de Newton, a qual previa, dada a precisão possível na época, com exatidão o movimento dos corpos no sistema solar. Segundo a teoria de Newton a interação entre corpos com massa era instantânea e portanto, não haveria o aparecimento de uma força de reação, num corpo em movimento acelerado, por interação com o seu próprio campo retardado.

Em 1905, Albert Einstein desenvolve a teoria da relatividade restrita em que uma das consequências é o facto de que a velocidade da luz no vácuo ser a velocidade máxima a que se pode trocar informação. Percebeu-se então que a teoria de Newton não poderia estar correta. Na realidade, desenvolvimentos tecnológicos permitiram testar a teoria de Newton com maior precisão e verificou-se que esta não descrevia exatamente o movimento dos corpos do sistema solar, por exemplo, falhava em descrever com exatidão a precessão do periélio de Mercúrio.

Em 1915, Einstein desenvolveu a sua teoria da gravitação, a Teoria da Relatividade Geral. O desenvolvimento desta teoria correspondeu a um gigantesco salto conceptual alterando o conceito de gravitação: não como uma força mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. A recém criada teoria suplantou a teoria de Newton ao prever corretamente o movimento dos corpos no sistema solar, explicar a evolução de sistemas binários de pulsares, antever e explicar a estrutura de buracos negros, a expansão do Universo, etc. A teoria da relatividade geral prevê ainda a existência de ondas gravitacionais, isto é, perturbações da geometria do espaço-tempo que se propagam a uma velocidade igual à velocidade da luz. Este fenómeno é uma das mais interessantes consequências da teoria de Einstein. A sua deteção permitiria estudar fenómenos e regiões do Universo que de outra forma estariam completamente inacessíveis, tais como, o interior de supernovas, formação de buracos negros ou mesmo épocas mais remotas do universo. No entanto, devido à constante de Newton ter um valor tão pequeno a sua deteção direta tem sido extremamente difícil - a demonstração indireta da existência de ondas gravitacionais foi obtida graças às investigações de Hulse e Taylor, galardoados com o Prémio Nobel da Física de 1993.

Os detetores de ondas gravitacionais atuais analisam sinais vindos de todo o universo estando igualmente sujeitos a ruído. De modo a fazer sentido dos sinais detetados o conhecimento do movimento dos corpos no espaço-tempo é de extrema importância na procura das ondas gravitacionais dado que, a amplitude destas ondas depende de quantidades características do movimento, por exemplo a velocidade angular no caso de dois corpos a orbitar um em torno do outro.

Assim, o interesse no estudo da *self-force* reapareceu de modo a verificar a sua influência no movimento dos corpos no espaço-tempo e consequências na emissão de ondas gravitacionais.

2 Reação de Radiação

Desde o século XVIII várias tentativas foram feitas de modo a descrever quantitativamente a força eletromagnética. Tal descrição era necessária pois, à luz da teoria de Newton, a quantificação desta força permitiria descrever o movimento de partículas carregadas sujeitas à interação eletromagnética.

Em 1784 Charles-Augustin de Coulomb, utilizando uma balança de torção, demonstra experimentalmente que a força elétrica entre dois corpos carregados obedece a uma lei do inverso do quadrado da distância entre os corpos. Alguns anos depois, em 1820, Hans Ørsted descobre que agulhas magnéticas são influenciadas por correntes elétricas alternadas e em 1826 André-Marie Ampère, a partir de dados experimentais, relaciona o campo magnético numa espira com a corrente elétrica que a atravessa. Porém, só em 1865 James Maxwell deduz teoricamente as leis macroscópicas que regem o eletromagnetismo, revolucionando o mundo da física.

Em 1889 Oliver Heaviside, inventando a notação vetorial, deduz, utilizando as equações de Maxwell, a forma correta da força magnética que atua numa partícula carregada que se move a uma dada velocidade. Até que em 1892 Hendrik Lorentz deriva a forma moderna da força eletromagnética que uma partícula carregada sentiria se colocada numa região do espaço com um dado campo elétrico e magnético.

A inclusão da força de Lorentz na equação de Newton permite determinar como uma partícula carregada reage na presença de campos eletromagnéticos externos. Todavia, em 1897, Joseph Larmor deduz, a partir das equações de Maxwell, que uma partícula carregada radia energia quando acelerada. Tal efeito vai completamente contra a expressão da força de Lorentz que indica que uma partícula sujeita a um campo eletromagnético acelera sem perda de energia. Em 1904, Max Abraham conclui que a perda de energia de uma partícula carregada acelerada pode ser vista como a interação da partícula com o seu próprio campo, deduzindo uma correção à força de Lorentz obtendo a expressão para a força de Abraham-Lorentz, a qual teve um profundo impacto na física da época e que, em última instância, revelou as limitações da física clássica em explicar fenômenos a escalas microscópicas.

2.1 Equações de Maxwell

No que se segue ir-se-á então deduzir a expressão da força de Abraham-Lorentz numa tentativa de introduzir o conceito de força de reação como oposição à mudança do estado de movimento. Considerem-se as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} i) \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & ii) \nabla \cdot \vec{B} &= 0; \\ iii) \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & iv) c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde \vec{E} representa o campo elétrico, \vec{B} o campo magnético, \vec{j} a densidade de corrente, ρ a densidade de carga, c a velocidade da luz no vácuo e ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo.

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ o campo magnético pode ser visto como o rotacional de um campo vetorial \vec{A} e da relação $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \Leftrightarrow \nabla \times (\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t) = 0$ conclui-se que existe um campo escalar ϕ tal que a quantidade entre parênteses é o gradiente desse campo:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.3)$$

\vec{A} é denominado o potencial vetor e ϕ o potencial escalar.

A representação dos potenciais nas Eqs.(2.2) e (2.3) automaticamente satisfaz as equações de Maxwell homogêneas *i*) e *ii*). Colocando a Eq.(2.2) em *i*) obtém-se

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.4)$$

Substituindo as Eqs.(2.2) e (2.3) em *iv*) tira-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Utilizando a identidade vetorial: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, obtém-se

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (2.6)$$

As Eqs.(2.2) e (2.3) não definem unicamente os campos \vec{B} e \vec{E} . Dado que \vec{B} é definido pela Eq.(2.3) em termos de \vec{A} , o potencial vetor pode ser definido a menos do gradiente de um escalar Λ :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda; \quad (2.7)$$

de modo a que \vec{E} se mantenha inalterado o potencial escalar tem que ser simultaneamente alterado:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (2.8)$$

A liberdade de o potencial vetor estar definido a menos de um gradiente implica que se pode restringir o potencial com uma outra condição, condição de gauge. Existe uma certa arbitrariedade na escolha desta restrição e na realidade depende muito do problema imposto. A escolha útil no caso de tratamento de campos dinâmicos é designada Condição de Gauge de Lorenz:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.9)$$

Com a condição da Eq.(2.9) a Eq.(2.6) pode ser simplificada e, bem como a Eq.(2.4), pode ser escrita na forma compacta

$$\square^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (2.10)$$

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}; \quad (2.11)$$

onde se introduziu o operador diferencial

$$\square^2 := -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2, \quad (2.12)$$

chamado o operador de D'Alembert.

2.2 Funções de Green

De modo a encontrar as expressões para os potenciais têm que ser resolvidas as Eqs(2.10) e (2.11), que tomam a forma geral

$$\square^2 u(\vec{r}, t) = v(\vec{r}, t), \quad (2.13)$$

onde o potencial $u(\vec{r}, t)$ satisfaz as condições assintóticas

$$u(\vec{r}, t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } |\vec{r}| \rightarrow +\infty \text{ ou } |t| \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

Dado que a Eq.(2.13) é uma equação linear a sobreposição de soluções também é solução. Pode-se assim utilizar o método das funções de Green.

A função de Green $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ age como um potencial gerado por um impulso pontual localizado no ponto $\vec{r} = \vec{r}'$ e aplicado no instante $t = t'$ que satisfaz as condições fronteira apropriadas. Esta obedece então à equação diferencial

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t'), \quad (2.15)$$

onde $\delta(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$.

Qualquer fonte $v(\vec{r}, t)$ pode ser vista como a soma de impulsos pontuais

$$v(\vec{r}, t) = \int \int \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') v(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}'; \quad (2.16)$$

da mesma forma um potencial $u(\vec{r}, t)$, gerado por uma fonte $v(\vec{r}, t)$, pode ser tido como a soma de potenciais gerados por impulsos pontuais, assim, dada a definição da função de Green $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$:

$$u(\vec{r}, t) = \int \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') v(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}'. \quad (2.17)$$

No espaço livre, isto é, sem qualquer fronteira, a função de Green, em termos espaciais, só pode depender da diferença $\vec{r} - \vec{r}'$, isto é, da posição relativa entre os dois eventos e, claro, $t - t'$. Podem-se então definir as variáveis $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $z_0 = t - t'$. Assim a Eq.(2.15) toma a forma

$$\square^2 G(\vec{r}, z_0) = -\delta(\vec{r})\delta(z_0). \quad (2.18)$$

De modo a encontrar a solução da Eq.(2.18) toma-se a sua transformada de Fourier :

$$\left[-p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \tilde{G}(\vec{p}, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r})\delta(z_0) e^{i\omega z_0} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} dz_0 d\vec{r}, \quad (2.19)$$

ou seja,

$$[-p^2 + k^2] \tilde{G}(\vec{p}, k) = -\frac{1}{4\pi^2}, \quad (2.20)$$

onde $k = \omega/c$ e se utilizou a convenção para as transformadas de Fourier

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{i\xi x} dx, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2.21)$$

Da Eq.(2.20) tira-se então

$$\tilde{G}(\vec{p}, k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - p^2}. \quad (2.22)$$

De modo a obter a função de Green tem que se inverter a transformada de Fourier na Eq.(2.22), tal que:

$$G(\vec{r}, z_0) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - p^2} e^{-ic k z_0} c dk d\vec{p}. \quad (2.23)$$

Começa-se for fazer integração na coordenada temporal. Para tal tem que se utilizar o teorema dos

resíduos considerando que k é uma variável complexa e tomando a integração como um integral num contorno fechado que contém os polos da integranda $f(k) = e^{-ickz_0} / (k^2 - p^2)$ no seu interior.

$f(k)$ tem os seus polos sobre o eixo real, em $k_+ = p$ e $k_- = -p$. Tem então que se ter cuidado na escolha do contorno. Uma técnica usual é subtrair uma quantidade, $i\epsilon$, infinitesimal de modo a deslocar os polos e após a integração tomar o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$f(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(k - i\epsilon)^2 - p^2} e^{-ickz_0} e^{-\epsilon cz_0}. \quad (2.24)$$

De modo a não perder generalidade tem que se considerar que ϵ pode ser positivo ou negativo.

Toma-se então o contorno $]-R, R[\cup \gamma_1$. Sobre a curva γ_1 , $k = Re^{i\theta}$ portanto, $dk = \partial k / \partial R dR + \partial k / \partial \theta d\theta = iRe^{i\theta} d\theta$. Assim $e^{-ickz_0} dk = iRe^{i\theta} e^{-icRz_0 \cos \theta} e^{Rcz_0 \sin \theta} d\theta$.

Se $z_0 > 0$, γ_1 terá que ser um semicírculo no semiplano inferior do plano complexo centrado na origem para que quando $R \rightarrow +\infty$ o integral ao longo de γ_1 não contribua, isto é, $\theta \in [-\pi, 0]$ e $e^{Rcz_0 \sin \theta} \rightarrow 0$. Tem-se então $\epsilon < 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R] \cup \gamma_1} \frac{e^{-ickz_0} e^{-\epsilon cz_0}}{(k - i\epsilon)^2 - p^2} dk &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-\epsilon cz_0} \int_{[-R, R]} \frac{e^{-ickz_0}}{(k - i\epsilon)^2 - p^2} dk \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-\epsilon cz_0} \left\{ -2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}(f, k_m) \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde se tomou $\text{Ind} (]-R, R[\cup \gamma_1, k_m) = -1$ pois o contorno é tomado no sentido horário.

Resta então calcular os resíduos de f em $k_+ = p + i\epsilon$ e $k_- = -p + i\epsilon$:

$$\text{Res}(f, k_+) = \left. \frac{e^{-ickz_0}}{2(k - i\epsilon)} \right|_{k_+}; \quad \text{Res}(f, k_-) = \left. \frac{e^{-ickz_0}}{2(k - i\epsilon)} \right|_{k_-};$$

assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ickz_0}}{(k - i\epsilon)^2 - p^2} e^{-\epsilon cz_0} dk &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -2\pi i \theta(z_0) e^{-\epsilon cz_0} e^{\epsilon cz_0} \left[\frac{e^{-icpz_0}}{2p} + \frac{e^{icpz_0}}{-2p} \right] \\ &= -2\pi \frac{\theta(z_0) \sin(cpz_0)}{p}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\theta(z_0)$ é a função em degrau de Heaviside.

A função de Green na Eq.(2.23) vem então

$$G(\vec{r}, z_0) = \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(cpz_0)}{p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} d\vec{p}. \quad (2.27)$$

Fazendo a mudança de variáveis para coordenadas esféricas, tomando o polo norte na direção de \vec{r} e integrando nas variáveis angulares:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, z_0) &= \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(cpz_0)}{p} e^{-ip\cdot r \cos \theta} p^2 \sin \theta d\theta d\varphi dp = \\ &= \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{+\infty} \int_0^\pi p \sin \theta e^{-ip\cdot r \cos \theta} \sin(cpz_0) d\theta dp = \\ &= \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{ir} \sin(cpz_0) [e^{-ip\cdot r \cos \theta}]_0^\pi dp = \\ &= \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^2} r \int_0^{+\infty} 2 \sin(pr) \sin(cpz_0) dp. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De modo a avaliar o último integral é útil ter em conta a seguinte igualdade trigonométrica: $\sin A \sin B = [\cos(A - B) - \cos(A + B)]/2$. Assim,

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, z_0) &= \theta(z_0) \frac{c}{(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} 2 \sin(pr) \sin(cpz_0) dp = \\ &= \theta(z_0) \frac{c}{2\pi^2 r} \int_0^{+\infty} \frac{\cos[p(r - cz_0)] - \cos[p(r + cz_0)]}{2} dp = \\ &= \theta(z_0) \frac{c}{2\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[p(r - cz_0)] - \cos[p(r + cz_0)]}{4} dp, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde no último passo se utilizou o facto de que o cosseno ser uma função par.

Sabendo que $\cos(x) = \text{Re}(e^{ix})$:

$$G(\vec{r}, z_0) = \theta(z_0) \frac{c}{8\pi^2 r} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(r - cz_0)} - e^{ip(r + cz_0)} dp \right]. \quad (2.30)$$

Cada integral é reconhecido como uma função delta de Dirac multiplicada por uma fator 2π . Utilizando a expressão para z_0 obtém-se:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \theta(t - t') \frac{c}{4\pi r} [\delta(r - c(t - t')) - \delta(r + c(t - t'))]. \quad (2.31)$$

Como a função em degrau de Heaviside na Eq.(2.31) garante que $t - t'$ é sempre positivo e r é uma quantidade positiva, a segunda função delta de Dirac é sempre nula; desta forma tira-se:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \theta(t - t') \frac{c}{4\pi r} \delta[r - c(t - t')]. \quad (2.32)$$

Esta é chamada função de Green Retardada ou Causal pois o tempo t' da fonte antecede sempre o tempo t do ponto de campo.

No caso de se ter tomado $z_0 < 0$ o contorno escolhido teria que ser diferente. Teria que se tomar o semicírculo na metade superior do plano complexo e portanto, $\epsilon > 0$. Os cálculos nesse caso são idênticos e obtinha-se a chamada Função de Green Avançada

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \theta(t' - t) \frac{c}{4\pi r} \delta[r + c(t - t')]. \quad (2.33)$$

A função de Green total é então dada por

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= \frac{1}{4\pi r} \left\{ \theta(t - t') \delta \left[t' - \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] + \theta(t' - t) \delta \left[t' - \left(t + \frac{r}{c} \right) \right] \right\} = \\ &= G_R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') + G_A(\vec{r}, t; \vec{r}', t'), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde G_R representa a função de Green Retardada e G_A a função de Green Avançada e se utilizou a propriedade da função delta $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$.

Faça-se agora a interpretação do argumento das funções delta de Dirac na Eq.(2.34).

Seja $\vec{w}(t')$ uma função vetorial que indica a posição da fonte em cada instante t' e \vec{r} o ponto de campo onde se vai medir o potencial. Dado que a informação eletromagnética, fótons, se propaga a uma velocidade finita, c , os fótons emitidos pela fonte num dado instante t_R , denominado tempo retardado, chegam ao ponto de campo \vec{r} num instante $t > t_R$.

Seja $\vec{w}(t_R)$ a posição retardada da fonte no tempo retardado t_R . Pode-se indicar \vec{r} como o vetor definido desde a posição retardada e o ponto do campo \vec{r} :

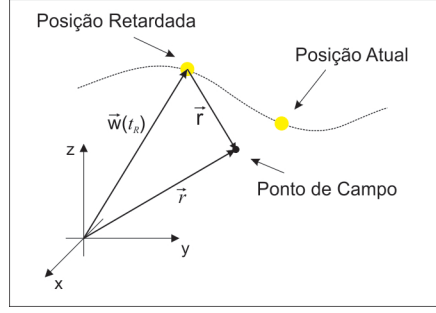


Figura 2.1: Representação da relação causal entre a emissão do campo eletromagnético e a sua medição.

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{w}(t_R). \quad (2.35)$$

O tempo retardado vem então dado pela relação

$$t_R = t - \frac{r}{c}, \quad (2.36)$$

onde $r = |\vec{r}' - \vec{w}(t_R)|$.

É importante notar que apenas um ponto na trajetória da partícula interage com o ponto na posição \vec{r} num instante t , isto pode-se demonstrar facilmente considerando que existiam dois pontos, com tempos retardados t_1 e t_2 tais que $r_1 = c(t - t_1)$ e $r_2 = c(t - t_2)$. Tomando a diferença tira-se $r_1 - r_2 = c(t_2 - t_1)$, portanto, a velocidade da partícula na direção de \vec{r} teria de ser c o que obviamente é impossível.

O mesmo pensamento pode ser feito no caso de a informação ser enviada de um evento no futuro, isto é, num tempo avançado $t_A = t + r/c$ e seja medida num instante $t < t_A$.

Assim a função de Green G_R prevê a resposta a um acontecimento vindo do passado. Por outro lado a função de Green G_A prevê a resposta a um acontecimento vindo do futuro, isto é, que ainda está para acontecer. No entanto, tal comportamento é uma direta violação do princípio da causalidade em que a causa tem que anteceder o efeito.

De modo a que a solução da Eq.(2.34) implemente a restrição imposta pelo princípio da Causalidade é natural impor condições iniciais de Cauchy: $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0$ e $\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')/\partial t = 0$ para $t < t'$, ou seja,

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \equiv G_R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi r} \delta[t' - t_R]. \quad (2.37)$$

Portanto, no caso dinâmico não é o estado da fonte no instante t em que o campo é medido que se tem que ter em conta pois os fótons propagam-se a uma velocidade finita. Isso significa que é o estado da fonte num dado instante no passado, t_R , que vai influenciar o campo no instante medido.

2.3 Potenciais e Campos Retardados

As soluções das Eqs.(2.10) e (2.11) podem agora ser encontradas utilizando a Eq.(2.37):

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') dt' d\vec{r}', \\ \vec{A} &= \vec{A}_0 + \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') dt' d\vec{r}', \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde ϕ_0 e \vec{A}_0 representam as soluções do sistema homogêneo, isto é, soluções das Eqs.(2.10) e (2.11) sem termos de fontes. Tais soluções correspondem a ondas vindas do exterior do sistema. Neste caso apenas se está interessado em soluções geradas pelo próprio sistema portanto, estes termos são tomados zero. Numa fase posterior, estes termos podem sempre ser adicionados diretamente à solução encontrada.

Assim,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_R)}{r} d\vec{r}', \quad (2.39)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_R)}{r} d\vec{r}', \quad (2.40)$$

onde $\rho(\vec{r}', t_R)$ é a densidade de carga que prevalece no ponto \vec{r}' no tempo retardado t_R .

Como os potenciais dependem de um instante no passado, retardado, estes são chamados Potenciais Retardados.

Dado que se ignorou a solução avançada, no cálculo da função de Green, a partir de agora existe uma assimetria temporal que não existia nas equações de Maxwell. O operador de D'Alembert é de segunda ordem no tempo portanto, não distingue passado de futuro. Desta forma é refletida a ideia de que os fótons se propagam para o futuro e não vice-versa.

O objetivo agora é integrar as expressões para os potenciais.

Tenha-se em conta a Eq.(2.39) para o potencial escalar. O denominador pode ser passado para fora na integração mas a dependência funcional é alterada, isto é, na integração $r=|\vec{r}-\vec{r}'|$ mas após a integração $r=|r-w(t_R)|$. Resta integrar $\int \rho(\vec{r}', t_R) d\vec{r}'$. No entanto, esta quantidade não é igual à carga da partícula. De modo a fazer a integração tem que se tomar toda a distribuição num dado instante de tempo mas dado o tempo retardado é necessário avaliar $\rho(\vec{r}', t_R)$ em tempos diferentes para diferentes partes da configuração. Se a fonte se está a mover obtém-se então uma imagem distorcida da carga total. Seria de esperar no entanto, que este problema não tivesse que ser considerado no caso de cargas pontuais mas na realidade não é assim.

Na formulação de Maxwell da eletrodinâmica em termos de densidades de cargas e correntes, uma carga pontual tem de ser tida como o limite de uma carga com um dado volume quando este tende para zero.

Tenha-se então em conta a seguinte experiência de pensamento. Considere-se um comboio que se move na direção de um observador. O comboio em movimento mede uma distância L . O observador, ao olhar para o comboio que se aproxima, vai receber os fótons vindos da frente (motor) e da parte de trás (cabine) do comboio simultaneamente e assim mede o comboio. No entanto, os fótons que partem da cabine, de modo a chegarem em simultâneo com os fótons que partem do motor têm que partir antes. Isto é, os fótons da cabine têm que percorrer uma distância maior, L' , que os fótons emitidos do motor, tal que: $L' = L + vt$; onde t representa o tempo que os fótons que partiram da cabine demoram a percorrer a distância L' . Assim

$$L' = L + v \frac{L'}{c} \Leftrightarrow L' = L \left[1 - \frac{v}{c} \right]^{-1}. \quad (2.41)$$

O comprimento medido pelo observador relaciona-se com a distância do comboio em movimento pela Eq.(2.41) ¹.

¹O que foi feito em nada está relacionado com a Teoria da Relatividade Restrita ou com a contração de Lorentz. O comprimento do comboio, L , é o comprimento do comboio em movimento e em nada se considera o comprimento do mesmo em repouso. O argumento utilizado relembra de alguma forma o Efeito de Doppler.

No caso do comboio se estar a afastar o sinal da velocidade será alterado. Em geral, se a direção da velocidade fizer um ângulo θ com a linha de visão a Eq.(2.41) é reescrita:

$$L' = L \left[1 - \frac{v \cdot \cos \theta}{c} \right]^{-1}. \quad (2.42)$$

Nas direções perpendiculares ao movimento não existe qualquer distorção pois não existe movimento nessa direção.

Tendo este argumento geométrico e voltando ao problema, pode-se fazer a analogia para um qualquer corpo. Tem-se então que o volume aparente de um corpo que se desloca com velocidade \vec{v} que faz um certo ângulo com o vetor \vec{r} , que liga o corpo e o observador, está relacionado com o volume atual do corpo por

$$V' = V \left[1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta} \right]^{-1}, \quad (2.43)$$

onde $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

Portanto, sempre que se tem um integral da forma da Eq.(2.39), em que a integranda é avaliada num tempo retardado, o volume efetivo é modificado pelo fator na Eq.(2.43). Como esta correção não depende do tamanho da partícula esta é tão relevante para partículas pontuais como para partículas com uma dada extensão espacial. Desta forma:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \vec{r} \cdot \vec{\beta} \right)}, \quad (2.44)$$

onde \vec{v} , em $\vec{\beta}$, é a velocidade da carga no tempo retardado e \vec{r} é o vetor que liga a posição retardada e o ponto de campo \vec{r} . Dado que a densidade de corrente é dada por $\rho\vec{v}$, tem-se, pelos mesmos argumentos,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{\left(r - \vec{r} \cdot \vec{\beta} \right)} = \frac{\vec{v}}{c^2} \phi(\vec{r}, t). \quad (2.45)$$

Os potenciais nas Eqs.(2.44) e (2.45) são designados os Potenciais de Liénard-Wiechert, em memória ao físico francês Alfred-Marie Liénard e ao físico alemão Emil Wiechert que deduziram independentemente as expressões para os potenciais retardados, em 1898 e 1900, respetivamente.

Encontradas expressões para os potenciais é então possível determinar o campo elétrico e magnético de uma carga pontual com um movimento arbitrário a partir das Eqs.(2.2) e (2.3). No entanto, a diferenciação não é direta pois as derivadas presentes nestas equações são relativas a quantidades medidas no ponto de campo enquanto as expressões para os potenciais dependem explicitamente de quantidades medidas no ponto retardado da partícula. Têm então que se relacionar a variação do ponto de campo com a variação da posição e tempo retardado da partícula e então diferenciar as expressões encontradas para os potenciais de Liénard-Wiechert.

Tal cálculo é bastante longo sendo deixado para anexo.

As expressões encontradas para os campos retardados são então

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\left(\vec{r} \cdot \vec{u} \right)^3} \left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right], \quad (2.46)$$

para o campo elétrico e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.47)$$

para o campo magnético, onde se introduziu o vetor

$$\vec{u} \equiv c\hat{r} - \vec{v}. \quad (2.48)$$

Da Eq.(2.47) conclui-se então que campo magnético criado por uma carga pontual é sempre perpendicular ao campo elétrico e ao vetor que liga o ponto retardado ao ponto de campo.

De notar que na Eq.(2.46) se a velocidade da partícula e a sua aceleração forem zero recupera-se a lei de Coulomb para o caso eletrostático. O termo que não depende da aceleração é designado Campo de Velocidade o segundo termo, esse sim que envolve a aceleração da partícula, decai com a primeira potencia de r e é dominante a grandes distâncias, sendo designado Campo Radiativo ou de Aceleração. A mesma terminologia é utilizada no caso do campo magnético.

2.4 Potência Radiada por uma Carga Pontual

Após o cálculo dos potenciais de Liénard-Wiechert e dos respetivos campos que estes geram faz-se o estudo da emissão de ondas eletromagnéticas por partículas em movimento acelerado.

No vácuo, as ondas eletromagnéticas emitidas por uma dada fonte propagam-se indefinidamente transportando energia. Entende-se como radiação o fluxo de energia que é emitido pela fonte e se propaga na forma de ondas eletromagnéticas até ao infinito.

Tomando a fonte no centro de uma superfície esférica de raio r , a potência, energia por unidade de tempo, que atravessa esta superfície será então a potência total emitida pela fonte. Esta é dada pelo fluxo do vetor de Poynting:

$$P(r) = \oint \vec{S} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dA. \quad (2.49)$$

Tendo então as expressões para os campos, Eqs.(2.46) e (2.47), tira-se da Eq.(2.49):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\vec{E} \times (\hat{r} \times \vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{r} - (\hat{r} \cdot \vec{E}) \vec{E}]. \quad (2.50)$$

No entanto, nem todo fluxo de energia emitido pela fonte constitui radiação, no sentido dado anteriormente. Alguma dessa energia, obviamente, corresponde a energia transportada pela partícula à medida que se move.

A potência radiada será então o caso quando se considera $r \rightarrow +\infty$:

$$P_{rad} \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} P(r), \quad (2.51)$$

ou seja, considerando uma esfera de raio r centrada na posição da partícula no instante t_R , a área da esfera é dada por $4\pi r^2$. Como a Lei de Coulomb para campos eletrostáticos diminui com $1/r^2$ e o mesmo comportamento tem a Lei de Biot-Savart para campos magnetostáticos, o vetor de Poynting decresce com $1/r^4$ para configurações estáticas. Portanto, fontes estáticas não radiam. Assim, no estudo da radiação, não se têm que considerar termos que decrescem mais rapidamente que a área pela qual a energia se distribui. Portanto, apenas os Campos de Radiação das Eqs.(2.46) e (2.47) representam radiação, no sentido anteriormente definido².

Desta forma,

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} [\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})]. \quad (2.52)$$

²Para que fique claro, os Campos de Velocidade transportam energia mas essa energia é como que transportada pela partícula no seu movimento.

Da Eq.(2.52) tira-se que \vec{E}_{rad} é perpendicular a \hat{r} portanto, o segundo termo da Eq.(2.50) anula-se. Tem-se então

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2 \hat{r}. \quad (2.53)$$

Pode-se considerar que no instante t_R a partícula está em repouso³, portanto, $\vec{u} = c\hat{r}$. Desta forma

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} [(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} - \vec{a}]. \quad (2.54)$$

Por conseguinte,

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi r} \right)^2 [a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2] \hat{r} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{r}, \quad (2.55)$$

onde θ é o ângulo entre \hat{r} e \vec{a} .

Uma conclusão pode ser tirada imediatamente da Eq.(2.55): não é radiada energia na direção da aceleração.

A potência total radiada é dada então por

$$P_{rad} = \oint \vec{S}_{rad} \cdot \vec{n} dA = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.56)$$

Fazendo a integração da Eq.(2.56) obtém-se

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \quad (2.57)$$

A Eq.(2.57) indica a potência total radiada por uma carga acelerada e é vulgarmente designada por Fórmula de Larmor.

2.5 Força de Abraham-Lorentz

Segundo as leis da eletrodinâmica clássica deduziu-se que uma partícula carregada acelerada radia energia. A energia radiada acontece com uma diminuição da energia cinética da partícula. Assim, sob a ação de uma dada força exterior, uma partícula carregada acelera menos que uma partícula neutra com a mesma massa.

A questão que se levanta é então como incluir os efeitos radiativos nas equações do movimento de uma partícula carregada.

Se for ignorada a emissão de radiação, uma partícula de carga q e massa m atuada por uma força exterior, \vec{F}_{ext} , move-se de acordo com a 2ª Lei de Newton:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext}. \quad (2.58)$$

Dado que a partícula é acelerada esta vai emitir radiação de acordo com a fórmula de Larmor. De modo a considerar a perda de energia e o seu efeito no movimento da partícula tem que se modificar a Eq.(2.58) adicionando uma força de reação radiativa, \vec{F}_{rad} :

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{rad}. \quad (2.59)$$

Apesar de \vec{F}_{rad} não estar determinada esta deve de obedecer a certas condições. \vec{F}_{rad} tem que:

1. se anular quando a aceleração da partícula for zero, dado que não existe emissão de radiação;

³Esta suposição terá mais sentido no tratamento relativista da radiação emitida por uma carga em movimento dado que $v = 0$ apenas representa uma escolha de referencial.

2. ser tal que o trabalho que esta realize sobre a partícula é igual à energia perdida pela mesma sobre a forma de radiação;

O ponto 2 vem diretamente da definição da dinâmica pelo formalismo de Newton, em que a lei da conservação de energia indica que a variação da energia cinética da partícula é igual ao somatório do trabalho feito por cada força que atua na partícula. Portanto, pode-se determinar a expressão para \vec{F}_{rad} exigindo que o trabalho realizado por esta força na partícula, num intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, tal que nos instantes t_1 e t_2 o sistema se encontre no mesmo estado, seja igual à perda de energia da partícula por radiação.

O facto de se ter que considerar um intervalo de tempo tal que a partícula retorne ao estado inicial prende-se com o facto de apesar dos campos de velocidade não contribuírem para a energia radiada estes transportam energia. À medida que a partícula acelera e desacelera esta troca energia com os campos de velocidade e ao mesmo tempo perde irremediavelmente energia através dos campos de radiação. Ao se considerar um intervalo de tempo em que a partícula retorna ao estado inicial a energia nos campos de velocidade é a mesma e a energia total perdida pela partícula é apenas a energia radiada.

Utilizando a fórmula de Larmor:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} dt. \quad (2.60)$$

Integrando por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.61)$$

Dado que nos instantes t_1 e t_2 o sistema se encontra no mesmo estado, o segundo termo do lado direito da expressão acima é zero. Desta forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{rad} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \ddot{\vec{a}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (2.62)$$

Dado que a velocidade da partícula é arbitrária é pertinente considerar

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \ddot{\vec{a}}. \quad (2.63)$$

A força na Eq.(2.63) é designada Força de Abraham-Lorentz e representa a primeira forma de quantificação na física de interações da fonte com o seu próprio campo.

2.6 Conclusões

A derivação feita anteriormente está longe de poder ser considerada rigorosa ou fundamental. Serve no entanto, como uma tentativa de introduzir o conceito de “auto força” ou auto interação.

A Eq.(2.63) pode ser introduzida na Eq.(2.59) e obtém-se

$$\vec{F}_{ext} = m (\dot{\vec{v}} - \tau_0 \ddot{\vec{v}}), \quad (2.64)$$

com

$$\tau_0 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi mc}. \quad (2.65)$$

A Eq.(2.64) pode ser considerada como uma equação que inclui de uma forma aproximada a influência média no tempo dos efeitos de reação da emissão de radiação. Note-se que a equação passa a ser de segunda ordem no tempo e portanto, está de alguma forma contra os requerimentos de uma equação do movimento dado que para além da posição e velocidade inicial é necessário indicar a aceleração inicial da partícula.

Utilizando o método das transformadas de Fourier é possível encontrar a solução mais geral da Eq.(2.64) para uma dada força exterior:

$$\vec{a}(t) = e^{\frac{t}{\tau_0}} \left[\vec{C}_1 - \frac{1}{m\tau_0} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t'}{\tau_0}} \vec{F}_{ext}(t') dt' \right], \quad (2.66)$$

onde C_1 é um vetor constante arbitrário e se assume que a força exterior tende para zero num dado instante finito do passado de modo a que o integral esteja bem definido.

Analise-se a Eq.(2.66) no caso relativamente simples de uma força exterior que é aplicada abruptamente no instante $t = 0$ e mantém-se constante a partir daí: $\vec{F}_{ext}(t) = \vec{f}\theta(t)$. Neste caso

$$\vec{a}(t) = e^{\frac{t}{\tau_0}} \left[\vec{C}_1 - \frac{\vec{f}}{m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \theta(t) \right]. \quad (2.67)$$

Verifica-se então que para uma escolha arbitrária de \vec{C}_1 , $\vec{a}(t) \propto e^{\frac{t}{\tau_0}}$ para $t \gg \tau_0$. Este resultado revela que qualquer que seja a magnitude da força exterior aplicada a aceleração da partícula tende sempre para infinito. O problema relatado é uma clara violação do princípio de conservação de energia e momento linear, sendo conhecido como o problema das acelerações infinitas. Observa-se porém, que este comportamento não físico pode ser evitado se se tomar $\vec{C}_1 = \vec{f}/m$. Desta forma a Eq.(2.67) é reescrita como:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{f}}{m} \left[\theta(-t) e^{\frac{t}{\tau_0}} + \theta(t) \right]. \quad (2.68)$$

Apesar deste resultado revelar que a aceleração da partícula não diverge para $t > 0$, faz aparecer um novo problema tão grave quanto o anterior. A Eq.(2.68) indica que a partícula tem de alguma forma ser presciente, isto é, a partícula como que soubesse que a força exterior vai ser aplicada, num instante $\sim \tau_0$ antes da sua aplicação começa a acelerar. Tal comportamento é uma clara violação do princípio da causalidade, sendo conhecido como o problema das pré-acelerações.

Mostrou-se então que a inclusão dos efeitos de auto-interação de origem eletromagnética na equação do movimento de uma partícula carregada leva ao aparecimento de graves problemas na física clássica, tornando duvidosa a validade da força de Abraham-Lorentz. Faz então sentido generalizar os resultados obtidos utilizando o formalismo relativista e verificar se os problemas encontrados persistem.

3 Força de Abraham-Lorentz-Dirac

Em termos históricos a força de Abraham-Lorentz representa a primeira forma de quantificação dos efeitos do campo criado por uma fonte nela própria. Como visto no capítulo anterior, a expressão encontrada levanta graves problemas à física clássica; a inclusão da força de Abraham-Lorentz na equação de Newton revela comportamentos acausais, com partículas a acelerar antes da aplicação da perturbação ou mesmo acelerações a tender para infinito independentemente da magnitude da perturbação inicial.

De modo a resolver estes problemas o caminho natural é generalizar o formalismo clássico e continuar o estudo da *self-force* à luz da teoria da relatividade restrita, introduzida por Albert Einstein em 1905, um ano depois da primeira dedução da expressão da *self-force*.

Tal generalização foi feita pela primeira vez por Paul Dirac em 1938. O tratamento feito leva no entanto, ao aparecimento de quantidades infinitas na posição da partícula. Foi então necessário fazer sentido dos infinitos que aparecem na dedução considerando que estes são uma contribuição para a massa da partícula, cuja massa mensurável, efetiva, corresponderia então a uma massa intrínseca à partícula somada à contribuição vinda da interação com o seu próprio campo eletromagnético - considerando apenas a interação eletromagnética.

A dedução de Dirac generaliza a expressão para a força de Abraham-Lorentz tornando-a válida para partículas cuja velocidade é próxima da velocidade da luz, obtendo-se assim a Força de Abraham-Lorentz-Dirac.

Neste capítulo faz-se então a dedução da expressão relativista da *self-force* eletromagnética de uma forma próxima do que foi feito inicialmente por Dirac [28].

3.1 Notação Tensorial

Em 1905 Albert Einstein introduziu a Teoria da Relatividade Restrita. Uma reformulação da Física Clássica baseada em dois postulados:

1. Princípio da Invariância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial de inércia.
2. Princípio da Relatividade: Todos os referenciais de inércia são equivalentes.

Do segundo postulado tira-se que as leis da física têm que tomar a mesma forma em qualquer referencial de inércia. A forma como as grandezas físicas medidas em diferentes referenciais inerciais se relacionam é dada por um conjunto de transformações designadas transformações de Lorentz.

De modo implementar o novo formalismo começa-se por definir o quadri-vector posição $x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$ que representa as coordenadas de um acontecimento no espaço-tempo.

Dados dois referenciais O e O' , as componentes das coordenadas no referencial O' devem de estar relacionadas com as componentes no referencial O pela relação:

$$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu. \quad (3.1)$$

As transformações de Lorentz baseiam-se na invariância do intervalo, isto é, dados dois acontecimentos no espaço-tempo, apesar destes terem coordenadas diferentes em referenciais diferentes, o intervalo que os separa no espaço-tempo é invariante para o referencial considerado:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\mu_\alpha a^\nu_\beta dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta, \quad (3.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. A Eq.(3.2) restringe os coeficientes a_{ν}^{μ} e as transformações de Lorentz podem ser explicitamente encontradas [61].

Pode-se introduzir o quadrivetor velocidade definido como:

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \quad (3.3)$$

onde τ representa o tempo próprio da partícula, isto é, o tempo medido por um observador que se encontra em co-movimento com a partícula.

Tendo em conta a invariância do intervalo e a métrica de Minkowski encontra-se a expressão para o fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.4)$$

onde $\beta = v/c$; que permite relacionar quantidades medidas em diferentes referenciais. Por exemplo, um intervalo de tempo medido por um observador em co-movimento com a partícula relaciona-se com o intervalo de tempo medido por um referencial que se move a uma dada velocidade em relação à partícula como: $dt = \gamma d\tau$. Desta forma a Eq.(3.3) pode ser escrita na forma:

$$v^{\mu} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma (c, \vec{v}). \quad (3.5)$$

Pode-se também introduzir o quadrivetor momento, p^{μ} , dado por:

$$p^{\mu} = mv^{\mu}. \quad (3.6)$$

Para além da generalização da mecânica clássica é também possível reescrever as equações do eletromagnetismo no formalismo tensorial de modo a obter uma teoria que seja explicitamente invariante para mudança de referencial de inércia.

Os potenciais \vec{A} e ϕ podem ser vistos como as componentes de um quadrivetor para transformações de Lorentz:

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right). \quad (3.7)$$

Neste formalismo a Condição de Gauge de Lorenz, Eq.(2.9), pode ser escrita como

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \quad (3.8)$$

Outro quadrivetor importante é a corrente

$$J^{\mu} = \left(c\rho, \vec{j} \right). \quad (3.9)$$

Escrevendo o operador de D'Alembert neste formalismo como: $\square^2 = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$, as Eqs.(2.10) e (2.11) podem ser reescritas na forma compacta:

$$\square^2 A^{\mu} = -\mu_0 J^{\mu}. \quad (3.10)$$

Também os campos elétrico e magnético, \vec{E} e \vec{B} , podem ser vistos como as componentes de um tensor-2, designado Tensor de Maxwell cujas componentes são dadas por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (3.11)$$

Assim, as equações de Maxwell não homogêneas $ii)$ e $iv)$ na Eq.(2.1) tomam a forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu, \quad (3.12)$$

ao passo que as equações de Maxwell homogêneas $i)$ e $iii)$ são uma consequência direta do tensor de Maxwell ser anti-simétrico e podem ser escritas como:

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (3.13)$$

Tendo em conta as expressões clássicas, as equações do movimento podem também ser escritas de forma explicitamente covariante:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}v_\nu. \quad (3.14)$$

As Eqs.(3.12) e (3.14) podem ser combinadas tal que

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J^\nu = -\frac{1}{\mu_0}F_{\nu\sigma}\partial_\mu F^{\mu\sigma} = -\frac{1}{\mu_0}[\partial_\mu(F_{\nu\sigma}F^{\mu\sigma}) - F^{\mu\sigma}\partial_\mu F_{\nu\sigma}]. \quad (3.15)$$

Utilizando a anti-simetria do tensor de Maxwell pode-se escrever

$$F^{\mu\sigma}\partial_\mu F_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}F^{\mu\sigma}(\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\nu}). \quad (3.16)$$

Tendo em conta a Eq.(3.13) a Eq.(3.16) pode ser escrita como

$$F^{\mu\sigma}\partial_\mu F_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2}F^{\mu\sigma}\partial_\nu F_{\sigma\mu} = \frac{1}{4}\partial_\nu(F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}). \quad (3.17)$$

Por conseguinte, a Eq.(3.15) pode ser escrita como:

$$f_\mu = -\frac{1}{\mu_0}\left[\partial_\mu(F_{\nu\sigma}F^{\mu\sigma}) - \frac{1}{4}\partial_\nu(F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma})\right]. \quad (3.18)$$

Definindo o Tensor de Energia-momento Eletromagnético

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\sigma}F_{\sigma\nu} - \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\right], \quad (3.19)$$

a Eq.(3.18) pode ser escrita de forma compacta

$$f^\nu = -\partial_\mu T^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

A Eq.(3.20) representa na sua forma mais fundamental as leis de conservação de energia e momento linear dado que o formalismo tensorial garante que a equação é independente do sistema de coordenadas considerado.

Introduzido o formalismo da relatividade restrita é possível prosseguir de modo a generalizar os resultados obtidos no capítulo anterior para espaços-tempo planos.

3.2 Quadripotencial Retardado

De modo a resolver a Eq.(3.10) é útil utilizar, como anteriormente, o método das funções de Green. O tratamento usual seria resolver a equação das ondas para um potencial gerado por um impulso pontual e encontrar a expressão para o propagador. Por outro lado, se for possível escrever a Eq.(2.34)

de uma forma explicitamente covariante o propagador encontrado na secção 2.2 será ainda válido em espaço-tempo plano.

Tendo em conta a seguinte propriedade da função delta de Dirac

$$\delta [f(x)] = \sum_{i=0}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left(\frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_i} \right|}, \quad (3.21)$$

onde x_i representam os zeros da função f . Tem-se então

$$\begin{aligned} \delta \left[(x - x')^2 \right] &= \delta \left[- (x^0 - x'^0)^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \right] = \delta \left[(x^0 - x'^0 - r) (x^0 - x'^0 + r) \right] \\ &= \frac{1}{2r} \left[\delta(x^0 - x'^0 - r) + \delta(x^0 - x'^0 + r) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como a função em degrau de Heaviside seleciona uma outra função delta, os propagadores na Eq.(2.34) são dados simplesmente por:

$$G_R(x - x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0 - x'^0) \delta \left[(x - x')^2 \right], \quad (3.23)$$

$$G_A(x - x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x'^0 - x^0) \delta \left[(x - x')^2 \right]. \quad (3.24)$$

A função em degrau de Heaviside apesar de aparentemente não invariante é na realidade invariante para transformações de Lorentz quando constrangida pela função delta de Dirac. A função de Green toma então uma forma explicitamente invariante para transformações de Lorentz e representa o propagador para a função (3.10).

Pode-se então prosseguir procurando expressões explícitas para os Potenciais de Liénard-Wiechert, que podem ser escritos formalmente como:

$$A_R^\mu(x) = \mu_0 \int J^\mu(x') G_R(x - x') d^4x', \quad (3.25)$$

$$A_A^\mu(x) = \mu_0 \int J^\mu(x') G_A(x - x') d^4x', \quad (3.26)$$

onde, como anteriormente, se ignoraram as soluções do sistema homogéneo por corresponderem a ondas vindas do exterior.

Tenha-se agora em conta a definição de densidade carga:

$$q = \int_V \rho(\vec{x}, t) d^3x. \quad (3.27)$$

Dada a propriedade da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - r(t)) dx = 1, \quad (3.28)$$

no caso de uma partícula pontual a Eq.(3.27) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{q} \int_V \rho(\vec{x}, t) d^3x = \int_V \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) d^3x. \quad (3.29)$$

A Eq.(3.29) permite encontrar uma expressão para a densidade de carga de uma partícula pontual

com vetor posição $\vec{r}(t)$ num dado referencial de inércia:

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)). \quad (3.30)$$

O mesmo raciocínio pode ser feito no caso da densidade de corrente de uma partícula pontual que se move com velocidade $\vec{v}(t)$ num dado referencial de inércia, tal que:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)). \quad (3.31)$$

Considerando uma partícula pontual com carga q que se move no espaço-tempo plano segundo uma trajetória descrita por uma função $z^\alpha(\tau)$ - que indica as coordenadas da partícula como função do tempo próprio τ - e com quadrivetor velocidade v^μ , pretende-se escrever as Eqs.(3.30) e (3.31) de uma forma covariante. Isto pode ser feito utilizando o quadrivetor corrente na forma:

$$J^\mu(x) = qc \int_\gamma v^\mu(\tau) \delta^4(x - z) d\tau, \quad (3.32)$$

onde a integração é tomada ao longo de toda a trajetória da partícula. O fator c apesar de aparentemente estranho quando comparado com as Eqs.(3.30) e (3.31) deve-se à propriedade da função delta de Dirac: $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$.

Inserindo a Eq.(3.32) na Eq.(3.25) e utilizando a função delta para integrar em d^4x' obtém-se a expressão para o quadripotencial retardado:

$$A_R^\mu(x) = \frac{cq\mu_0}{2\pi} \int_\gamma v^\mu(\tau) \theta(x^0 - z^0(\tau)) \delta[(x - z(\tau))^2] d\tau. \quad (3.33)$$

O integral ao longo do tempo próprio da partícula apenas contribui no tempo retardado τ_R . Este pode ser encontrado utilizando a condição de cone de luz, ou seja, que o intervalo entre os dois acontecimentos no espaço tempo seja zero:

$$\sigma(x, \tau_R) := \frac{1}{2} [x - z(\tau_R)]^2 = 0, \quad (3.34)$$

onde o fator $1/2$ foi colocado para conveniência futura; e a imposição traduzida pela função em degrau de Heaviside: $x^0 > z^0(\tau_R)$.

O integral da Eq.(3.33) pode ser calculado alterando a variável de integração. Considerando o resultado

$$\frac{d}{d\tau} \sigma(x, \tau_R) = -[x - z(\tau)]_\mu v^\mu(\tau), \quad (3.35)$$

encontra-se facilmente

$$A_R^\mu(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{v^\mu}{-v^\nu [x - z(\tau)]_\nu} \Big|_{\tau=\tau_R}. \quad (3.36)$$

A Eq.(3.36) é a expressão invariante de Lorentz dos Potenciais de Liénard-Wiechert. Este resultado pode ser colocado numa forma não covariante de modo a se recuperarem as expressões encontradas anteriormente. A condição (3.34) implica $x^0 - z^0(\tau) = |\vec{x} - \vec{z}(\tau)| \equiv r$. Assim:

$$\begin{aligned} v^\alpha [x - z(\tau)]_\alpha &= v^0 [x^0 - z^0(\tau)] - v^i \cdot [x^i - z^i(\tau)] \\ &= \gamma cr - \gamma \vec{v} \cdot \vec{r} = \gamma c \left(r - \vec{\beta} \cdot \vec{r} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo este resultado na Eq.(3.36) obtém-se as expressões não covariantes para o potencial escalar e para o potencial vetor. De notar que o fator geométrico sugerido na integração dos potenciais

retardados, no capítulo anterior, aparece naturalmente.

3.3 Mapeamento do Cone de Luz

As expressões deduzidas até aqui estão escritas de acordo com o *Sistema Internacional* de unidades de modo a facilmente se fazer a analogia com o caso clássico, deduzido no capítulo anterior. O propósito foi cumprido. A partir de agora todo o texto será escrito utilizando o *Sistema de Unidades Geometrizadas*, em que $c = G = 1$ e $\mu_0 = 4\pi$. As expressões anteriores podem então ser transformadas simplesmente fazendo aplicação direta destas igualdades.

Encontradas as expressões para o quadripotencial podem-se calcular as componentes do tensor de Maxwell utilizando as Eqs.(3.11) e (3.36). No entanto, tal é trabalhoso. A dificuldade aparece do facto das derivadas parciais na Eq.(3.11) serem relativas às coordenadas do ponto de campo e a expressão encontrada para o potencial vetor depende explicitamente de quantidades avaliadas no tempo retardado τ_R . Esta dificuldade já apareceu na dedução do quadri vetor potencial, porém, nesse cálculo, a propriedade (3.21) e o resultado (3.35) simplificaram os cálculos e não foi necessário introduzir novos conceitos. No caso da dedução do tensor de Maxwell tal é justificado e introduz-se assim uma forma sistemática de relacionar quantidades avaliadas no ponto de campo com quantidades avaliadas no tempo retardado.

Como visto na Secção 2.2, dado um ponto de campo x existe um e um só ponto $z(\tau)$ da trajetória da partícula que intersesta o cone de luz passado do ponto de campo. Assim, o cone de luz passado define um mapeamento natural entre o ponto de campo x e um ponto específico $z(\tau)$ na trajetória da partícula.

Seja x um ponto de campo e $z(\tau_R)$ o ponto em que a linha do mundo da partícula intersesta o cone de luz passado de x . O tempo retardado τ_R pode ser determinado resolvendo a Eq.(3.34) que indica que os pontos x e $z(\tau_R)$ estão ligados por uma geodésica nula, β .

É necessária uma medida invariante da distância entre x e $z(\tau_R)$. Considere-se a quantidade escalar

$$\mathcal{R}(x) = -\eta_{\mu\nu} v^\mu(\tau) [x^\nu - z^\nu(\tau)]. \quad (3.38)$$

Num referencial de Lorentz momentaneamente em co-movimento (MCLF), em que a partícula está momentaneamente em repouso num instante τ , $\mathcal{R}(x) = x^0 - z^0(\tau)$, ou seja, $\mathcal{R}(x)$ mede a distância no espaço-tempo percorrida pela luz ao se propagar de $z(\tau_R)$ até x . Assim, o invariante $\mathcal{R}(x)$ pode ser designado por distância retardada, a distância medida num MCLF entre o ponto de campo e a posição da partícula no tempo retardado.

Note-se que como τ_R pode ser determinado sabendo o ponto de campo x , não há necessidade de indicar a dependência explícita de \mathcal{R} de τ_R .

O vetor $x^\mu - z^\mu(\tau_R)$ é um vetor nulo que aponta na direção de $z(\tau_R)$ para x . É útil redimensioná-lo por um fator \mathcal{R}^{-1} , definindo um novo vetor:

$$k^\mu(x) = \frac{1}{\mathcal{R}} [x^\mu - z^\mu(\tau_R)]. \quad (3.39)$$

Tendo em conta as Eqs.(3.34) e (3.38), k^μ satisfaz:

$$\begin{aligned} k_\mu(x) k^\mu(x) &= 0, \\ k_\mu(x) v^\mu(\tau_R) &= -1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dado que x e $z(\tau_R)$ estão relacionados, uma variação do ponto de campo, que não seja ao longo de β , implica uma variação de τ_R . Para deslocamentos infinitesimais pode-se relacionar a variação em x com a variação em τ_R . Suponha-se que se desloca o ponto de campo x para $x + \delta x$. O cone de luz passado passa a intersestar a trajetória da partícula no ponto $z(\tau_r + \delta\tau_R)$. Estes pontos estão relacionados entre si pela Eq.(3.34), $\sigma(x + \delta x, \tau_R + \delta\tau_R) = 0$. Fazendo a expansão em primeira ordem e utilizando as definições de k^μ e \mathcal{R} obtém-se: $k_\mu \delta x^\mu + \delta\tau_R = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial\tau_R}{\partial x^\mu} = -k_\mu. \quad (3.41)$$

A Eq.(3.41) pode ser utilizada de modo a construir uma regra de diferenciação de uma função de $f(x)$ que contenha uma dependência implícita de τ_R . Tome-se a dependência explícita da função $f(x)$ em τ_R escrevendo $f(x) \equiv F(x, \tau_R)$. Diferenciando, tomando temporariamente as variáveis x e τ_R como independentes, tira-se

$$df = \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_R} \right) d\tau_R. \quad (3.42)$$

Utilizando a Eq.(3.41) obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right)_{\tau_R} - k_\mu \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_R} \right)_x, \quad (3.43)$$

que define então a regra de diferenciação sob o mapeamento do cone de luz.

A Eq.(3.43) torna possível calcular as componentes do tensor de Maxwell de uma forma simples. Nesse sentido, é útil realizar alguns cálculos auxiliares.

A aplicação direta da Eq.(3.43) permite encontrar uma forma explicita para a derivada de $\mathcal{R}(x)$:

$$\partial_\mu \mathcal{R} = -v_\mu + (1 + \mathcal{R}a^\nu k_\nu) k_\mu, \quad (3.44)$$

em que todas as quantidades referentes à linha do mundo, tais como v^μ e a^μ , são para ser avaliadas no tempo retardado τ_R . Da mesma forma, tira-se que $\partial_\mu v^\nu = -k_\mu a^\nu$.

Partindo da Eq.(3.11), estes resultados tornam possível calcular as componentes do tensor de Maxwell:

$$F_{\mu\nu} = \frac{2q}{\mathcal{R}} [a_{[\mu} k_{\nu]} + a_\alpha k^\alpha v_{[\mu} k_{\nu]}] + \frac{2q}{\mathcal{R}^2} v_{[\mu} k_{\nu]}, \quad (3.45)$$

onde os parênteses retos denotam anti-simetrização dos índices: $A_{[\mu} B_{\nu]} = (A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu)/2$.

A forma adotada para a Eq.(3.45) separa explicitamente o tensor de Maxwell numa parte que depende da aceleração, que por variar com \mathcal{R}^{-1} é identificada como a contribuição dos campos de radiação, definidos no capítulo anterior; e numa parte que varia com \mathcal{R}^{-2} , identificada como a contribuição dos campos de velocidade que como visto não contribuem para a energia radiada pela partícula.

Por fim, substituindo a Eq.(3.45) na Eq.(3.19) é possível calcular o tensor de energia momento, o qual pode ser escrito na forma $T^{\mu\nu} = T_{rad}^{\mu\nu} + T_{vel}^{\mu\nu}$, em que se considera uma divisão natural entre os campos de velocidade e os campos de radiação. Tem-se assim para cada uma das componentes:

$$T_{rad}^{\mu\nu} = \frac{q^2}{4\pi\mathcal{R}^2} [a_\alpha a^\alpha - a_k^2] k^\mu k^\nu, \quad (3.46)$$

$$T_{vel}^{\mu\nu} = \frac{q^2}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\mathcal{R}^3} \left[k^{(\mu} a^{\nu)} + a_k \left(k^{(\mu} k^{\nu)} - k^\mu k^\nu \right) \right] + \frac{1}{\mathcal{R}^4} \left[2k^{(\mu} v^{\nu)} - k^\mu k^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \right] \right\},$$

em que se definiu $a_k = a_\alpha k^\alpha$ e os parênteses curvos indicam simetrização dos índices: $A_{(\alpha} B_{\beta)} = (A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha)/2$.

A divisão do tensor de energia-momento faz sentido pois fora da linha do mundo da partícula cada uma das componentes é conservada, isto é, $\partial_\beta T_{rad}^{\mu\nu} = \partial_\beta T_{vel}^{\mu\nu} = 0$, para $\mathcal{R} \neq 0$. A interpretação de cada uma das partes corresponder aos campos de radiação e de velocidade deve-se à forma como estes variam em função de \mathcal{R} .

3.4 Coordenadas Retardadas

O que foi feito na secção anterior é muito útil para diferenciar quantidades que dependem implicitamente do tempo retardado. Todavia, é necessário desenvolver a ideia de mapeamento do cone de luz e construir um sistema de coordenada denominadas *Coordenadas Retardadas*. A ideia é desenvolver um sistema de coordenadas baseado no tempo retardado τ_R e na distância retardada \mathcal{R} . Estas coordenadas estarão centradas na linha do mundo da partícula e dado um ponto de campo x é possível indicar a sua posição no espaço-tempo utilizando apenas quantidades dependentes da posição retardada.

O sistema de coordenadas retardadas $(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A)$, onde $\theta^A = (\theta, \phi)$ são dois ângulos polares, é construído da seguinte forma: seleciona-se o ponto $z(\tau_R)$ na linha do mundo acelerada da partícula; considera-se então o cone de luz futuro deste ponto e a todos os eventos do espaço-tempo que estejam sobre esse cone de luz associa-se a mesma coordenada τ_R . O cone de luz indicado é gerado por vetores nulos radiados de $z(\tau_R)$ em todas as direções possíveis. Um e um só desses vetores pode ser especificado selecionando dois ângulos, θ^A , que indicam a direção do vetor em relação a um eixo de referência. A todos os eventos no espaço-tempo sobre este vetor associa-se as mesmas coordenadas θ^A . Finalmente um evento específico no cone de luz pode ser caracterizado pelo parâmetro afim \mathcal{R} da geodésica nula única que liga este evento ao vértice do cone de luz, $z(\tau_R)$.

A definição das coordenadas retardadas não está, no entanto, completa. A construção feita não é única pois ainda não foram definidos os ângulos θ^A , isto é, ainda não foi indicado como localizar o eixo polar num dado cone de luz a partir do qual se definem os ângulos θ^A .

Tome-se a seguinte construção: considere-se um referencial de Lorentz (t, x, y, z) que está momentaneamente em co-movimento com a partícula num instante $\tau = \tau_R$. Designe-se este referencial, por simplicidade, o referencial- τ_R . Neste referencial a quadrivelocidade da partícula está inteiramente segundo o eixo temporal. Pode-se assim escrever $v^\mu(\tau_R) \stackrel{*}{=} \delta_t^\mu$, onde se introduziu a notação “ $\stackrel{*}{=}$ ” para indicar igualdade no referencial de Lorentz especificado. Pode-se então orientar os eixos espaciais de tal forma que a parte espacial da quadriaceleração aponte na direção do eixo polar: $a^\mu(\tau_R) \stackrel{*}{=} a(\tau_R) \delta_z^\mu$, onde $a(\tau_R)$ corresponde à norma do vetor aceleração. Fazendo esta construção em cada ponto da linha do mundo da partícula define-se um eixo polar em cada um dos cones de luz e os ângulos θ^A estão bem definidos para cada um deles.

Definido o sistema de coordenadas retardadas em espaço-tempo plano é útil encontrar como se relaciona este sistema de coordenadas - não inercial - com um sistema de coordenadas inercial.

Seja $k^\mu(\tau_R, \theta^A)$ o vetor tangente à geodésica nula β que liga o ponto $z(\tau_R)$ e um evento $x^\mu(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A)$. Dado que β tem como parâmetro afim a distância retardada \mathcal{R} , o vetor k^μ admite a definição

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\mathcal{R}}. \quad (3.47)$$

Por definição de geodésica nula k^μ é um vetor nulo, desta forma, a sua normalização é arbitrária. Pode-se assim impor que

$$\eta_{\mu\nu} k^\mu(\tau_R, \theta^A) v^\nu(\tau_R) = -1. \quad (3.48)$$

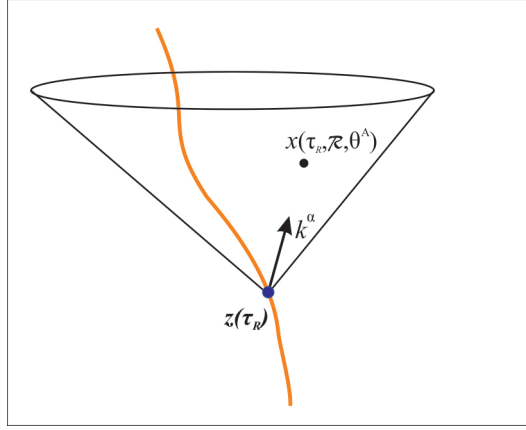


Figura 3.1: Representação gráfica do sistema de coordenadas retardadas em espaço-tempo plano.

Integrando a relação (3.47) tira-se:

$$x^\mu(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A) = z^\mu(\tau_R) + \mathcal{R}k^\mu(\tau_R, \theta^A). \quad (3.49)$$

A Eq.(3.49) é idêntica à relação (3.39) encontrada na secção anterior, no entanto, existe uma diferença: anteriormente considerou-se que k^μ era uma função do ponto de campo x , ao passo que neste caso k^μ é uma função de τ_R e θ^A que, conjuntamente com \mathcal{R} , especificam o ponto x . Esta é a regra de transformação entre o sistema de coordenadas inercial x^μ e o sistema de coordenadas retardadas $(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A)$.

As expressões encontradas anteriormente para o tensor de energia-momento eletromagnético dependem do vetor $k^\mu(\tau_R, \theta^A)$. Pode-se então antever a necessidade de determinar este vetor em qualquer instante τ da linha do mundo.

De acordo com as restrições da Eq.(3.48) e o facto de k^μ ser um vetor nulo este pode ser escrito explicitamente no referencial- τ_R , definido anteriormente, como:

$$k^\mu(\tau_R, \theta^A) \stackrel{*}{=} (1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (3.50)$$

No referencial de Lorentz (t', x', y', z') associado ao tempo retardado τ'_R , definido de forma a que $v^\mu(\tau'_R) \stackrel{*}{=} \delta^\mu_{t'}$ e $a^\mu(\tau'_R) \stackrel{*}{=} a(\tau'_R)\delta^\mu_{z'}$, $k^\mu(\tau'_R, \theta^A)$ tomaria exactamente a mesma forma. Este facto pode ser utilizado de modo a escrever uma equação diferencial para $k^\mu(\tau_R, \theta^A)$, que permitirá trabalhar num único referencial de Lorentz.

Considere-se um pequeno deslocamento ao longo da linha do mundo da partícula tal que $\tau'_R = \tau_R + \delta\tau_R$. A velocidade relativa entre o referencial- τ_R e referencial- τ'_R é dada por $v^\mu(\tau_R + \delta\tau_R) - v^\mu(\tau_R) = a^\mu(\tau_R)\delta\tau_R$. Esta relação permite deduzir as componentes de $v^\mu(\tau_R + \delta\tau_R)$ no referencial- τ_R : $v^\mu(\tau_R + \delta\tau_R) \stackrel{*}{=} (1, 0, 0, a\delta\tau_R)$. Encontra-se então que os dois referenciais estão relacionados por um *boost* de Lorentz, com parâmetro $u = a(\tau_R)\delta\tau_R$. Assim em primeira ordem em u as transformações de Lorentz entre dois referenciais são dadas por:

$$\begin{cases} t' = t - uz \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = z - ut \end{cases} \quad (3.51)$$

Invertendo estas leis de transformação podem-se calcular as componentes de $k^\mu (\tau_R + \delta\tau_R, \theta^A)$ no referencial- τ_R . Utilizando a equação (3.50):

$$\begin{cases} k^t (\tau_R + \delta\tau_R) \stackrel{*}{=} 1 + a (\tau_R) \cos \theta \delta\tau_R \\ k^x (\tau_R + \delta\tau_R) \stackrel{*}{=} \sin \theta \cos \phi \\ k^y (\tau_R + \delta\tau_R) \stackrel{*}{=} \sin \theta \sin \phi \\ k^z (\tau_R + \delta\tau_R) \stackrel{*}{=} \cos \theta + a (\tau_R) \delta\tau_R \end{cases} \quad (3.52)$$

Juntando os resultados das Eqs.(3.52) pode-se escrever:

$$\frac{\partial k^\mu}{\partial \tau_R} \stackrel{*}{=} (a \cos \theta, 0, 0, a), \quad (3.53)$$

que pode ser escrita na forma de uma equação tensorial como

$$\frac{\partial k^\mu}{\partial \tau_R} = a_k v^\mu + a^\mu, \quad (3.54)$$

que é válida num referencial de Lorentz arbitrário.

Com as condições iniciais dadas pela Eq.(3.50) e a equação de evolução (3.54) pode-se encontrar o vetor $k^\mu (\tau_R, \theta^A)$ em qualquer instante τ da linha do mundo.

Por fim, construído o sistema de coordenadas $(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A)$, é útil calcular a métrica nestas coordenadas. O objetivo de tal cálculo será explícito na próxima secção.

Diferenciando a Eq.(3.49),

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \left(v^\mu + \mathcal{R} \frac{\partial k^\mu}{\partial \tau_R} \right) d\tau_R + k^\mu d\mathcal{R} + \mathcal{R} \frac{\partial k^\mu}{\partial \theta^A} d\theta^A \\ &= [(1 + \mathcal{R} a_k) v^\mu + \mathcal{R} a^\mu] d\tau_R + k^\mu d\mathcal{R} + \mathcal{R} \frac{\partial k^\mu}{\partial \theta^A} d\theta^A. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Que pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$dx^\mu = \bar{v}^\mu d\tau_R + k^\mu d\mathcal{R} + e_A^\mu d\theta^A. \quad (3.56)$$

Utilizando a definição de métrica, Eq.(3.2), basta substituir a relação anterior e fazer os vários produtos internos. Dado que a métrica é válida para qualquer referencial de Lorentz podem-se fazer os cálculos num referencial de Lorentz arbitrário.

Assim as componentes e_A^α podem ser calculadas no referencial- τ_R utilizando a Eq.(3.50) e tiram-se explicitamente as relações $k_\mu e_A^\mu = 0$, $u_\mu e_A^\mu = 0$ e $\eta_{\mu\nu} e_A^\mu e_A^\nu = \text{diag} (\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^2 \sin^2 \theta)$. São também úteis as relações $v^\mu a_\mu = 0$, $k_\mu \partial k^\mu / \partial \tau_R = 0$ e a Eq.(3.48). Juntando todos os resultados obtém-se:

$$ds^2 = - \left[(1 + \mathcal{R} a_k)^2 - \mathcal{R}^2 a^2 \right] d\tau_R^2 - 2d\tau_R d\mathcal{R} + 2\mathcal{R} a_\alpha e_A^\alpha d\tau_R d\theta^A + \mathcal{R}^2 d\Omega_{S^2}^2, \quad (3.57)$$

onde $a^2 = a_\alpha a^\alpha$ e $d\Omega_{S^2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é a métrica da esfera-2 de raio unitário.

Apesar do aspeto complicado da métrica de Minkowski quando escrita em coordenadas retardadas, com vários termos não diagonais, esta prova a sua utilidade quando se tem em conta que as quantidades calculadas nas secções anteriores são expressas naturalmente em termos de τ_R e \mathcal{R} .

3.5 Força de Abraham-Lorentz-Dirac

Está-se finalmente em posição de fazer a dedução da força de Abraham-Lorentz-Dirac.

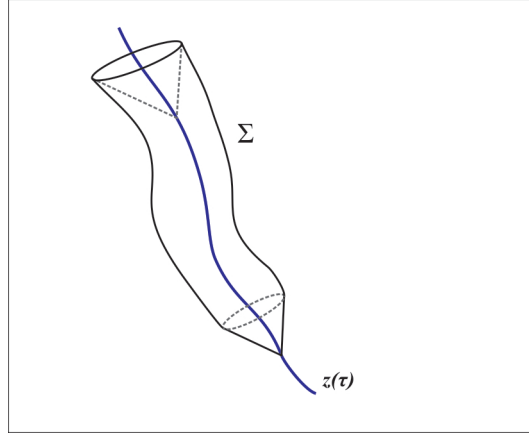


Figura 3.2: Tubo do mundo Σ que envolve a linha do mundo da partícula.

O tratamento seguinte segue a dedução feita por Dirac, a qual é baseada na conservação de energia-momento. Outra derivação, devida a Landau e Lifshitz, pode ser encontrada na Ref.[54]. Esta parte de uma relação entre o potencial retardado e o potencial avançado para deduzir a *self-force*. O potencial avançado é, no entanto, uma clara violação ao princípio da causalidade assim, apesar de mais simples, por escolha do autor essa derivação não será seguida. Os resultados encontrados são idênticos para ambas as derivações.

Considere-se um tubo, um cilindro-3, Σ , que envolve a linha do mundo da partícula. Pretende-se calcular a quantidade de momento eletromagnético, P_{em} que flui para fora da superfície Σ por unidade de tempo próprio.

De forma geral o fluxo de quadrimomento que flui para fora de uma hipersuperfície Σ é dado por:

$$\Delta P^\mu = \int_{\Sigma} T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu, \quad (3.58)$$

onde $d\Sigma_\nu$ é o elemento de superfície direcionado para fora de Σ .

É possível demonstrar que ΔP^μ não depende da forma do tubo [54]. Assim, sem perda de generalidade, pode-se escolher Σ como a hipersuperfície mais simples, uma hipersuperfície com \mathcal{R} constante.

Tem então que se calcular o elemento de superfície de Σ , dado por $d\Sigma_\mu = n_\mu dA$, onde dA é o elemento de superfície tridimensional e n_μ é a normal exterior à superfície. Tendo em conta a métrica na Eq.(3.57), a métrica induzida em Σ é dada por:

$$ds_\Sigma^2 = - \left[(1 + \mathcal{R}a_k)^2 - \mathcal{R}^2 a^2 \right] d\tau_R^2 + 2\mathcal{R}a_\alpha e_A^\alpha d\tau_R d\theta^A + \mathcal{R}^2 d\Omega_{S^2}^2. \quad (3.59)$$

O elemento de superfície dA em termos das coordenadas vem $dA = \sqrt{-g_\Sigma} d^3x$, onde g_Σ representa o determinante da métrica induzida, definida na Eq.(3.59).

Como Σ foi escolhida ser uma superfície com \mathcal{R} constante a normal exterior n_μ tem que ser proporcional ao gradiente de \mathcal{R} . Pode-se então escrever $n_\mu = \lambda \partial_\mu \mathcal{R}$, onde a constante de proporcionalidade pode ser determinada garantindo que n_μ está devidamente normalizado. Assim, $\lambda^{-2} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}_\nu$, onde $\mathcal{R}_\mu \equiv \partial_\mu \mathcal{R}$. Em coordenadas retardadas: $\partial_\mu \mathcal{R} = \delta_\mu^{\mathcal{R}}$, portanto, $\lambda^{-2} = g^{\mathcal{R}\mathcal{R}}$, uma componente da métrica inversa. O elemento $g^{\mathcal{R}\mathcal{R}}$ pode ser encontrado simplesmente pela regra de Cramer aplicada ao cálculo de matrizes inversas: $g^{\mathcal{R}\mathcal{R}} = \text{Cof}(g_{\mathcal{R}\mathcal{R}}) / g$, onde $\text{Cof}(g_{\mathcal{R}\mathcal{R}})$ representa a entrada "RR" da matriz dos cofatores. Tira-se diretamente que $\text{Cof}(g_{\mathcal{R}\mathcal{R}}) = g_\Sigma$, o determinante da métrica induzida na superfície Σ . Desta forma o fator de normalização é dado simplesmente por $\lambda = \sqrt{g/g_\Sigma}$.

Utilizando estes resultados tira-se então que

$$d\Sigma_\mu = \mathcal{R}_\mu \sqrt{-g} d^3x. \quad (3.60)$$

Resta então calcular o determinante da matriz composta pelos elementos da métrica. O cálculo é muito simples se se utilizar o método de Laplace pois existe uma linha com uma única entrada não nula. Tira-se então que $\sqrt{-g} = \mathcal{R}^2 \sin \theta$.

Substituindo na Eq.(3.60) tem-se:

$$d\Sigma_\mu = \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}^2 d\tau_R d\Omega, \quad (3.61)$$

onde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido.

Os resultados [54]

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int k^\mu d\Omega &= v^\mu, \\ \frac{1}{4\pi} \int k^\mu k^\nu d\Omega &= \frac{1}{3} g^{\mu\nu} + \frac{4}{3} v^\mu v^\nu, \\ \frac{1}{4\pi} \int k^\mu k^\nu k^\rho d\Omega &= \frac{1}{3} (v^\mu g^{\nu\rho} + v^\nu g^{\rho\mu} + v^\rho g^{\mu\nu}) + 2v^\mu v^\nu v^\rho, \end{aligned} \quad (3.62)$$

podem ser utilizados de modo a calcular o fluxo de energia-momento que atravessa o tubo do mundo Σ .

Como visto na secção anterior, o tensor de energia-momento admite uma separação natural das contribuições dos campos de velocidade e de radiação. Pode-se assim calcular o fluxo de cada uma das componentes separadamente, tendo presente que o fluxo total será, obviamente, a soma das duas contribuições.

Utilizando o resultado $k^\mu \mathcal{R}_\mu = 1$ a componente radial do tensor de energia-momento radiativo é dada simplesmente por

$$T^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{R} = \frac{q^2}{4\pi \mathcal{R}^2} (a^2 - a_k^2) k^\mu, \quad (3.63)$$

portanto, o fluxo de quadrimomento radiativo é dado por:

$$\Delta P_{rad}^\mu = \frac{q^2}{4\pi} \int (a^2 - a_k^2) k^\mu d\tau_R d\Omega. \quad (3.64)$$

De notar que na Eq.(3.64) que os fatores em \mathcal{R} cancelaram portanto, o resultado é independente de \mathcal{R} . Deste resultado tira-se que a taxa de variação do momento radiativo é então dada por:

$$\frac{dP_{rad}^\mu}{d\tau_R} = \frac{q^2}{4\pi} \int (a^2 - a_k^2) k^\mu d\Omega. \quad (3.65)$$

Utilizando os resultados das Eqs.(3.62) é possível fazer a integração e obtém-se:

$$\frac{dP_{rad}^\mu}{d\tau_R} = \frac{2}{3} q^2 a^2 v^\mu. \quad (3.66)$$

A Eq.(3.66) indica a quantidade de momento radiativo que atravessa uma superfície com \mathcal{R} constante por unidade de tempo. Num MCLF esta equação reduz-se à fórmula de Larmor, Eq.(2.57), com as adaptações ao sistema de coordenadas geometrizadas.

Fazendo o mesmo cálculo para a outra componente do tensor de energia-momento, tira-se que a

parte radial é dada por:

$$T_{vel}^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{R} = \frac{q^2}{4\pi\mathcal{R}^3} \left[a^\mu + a_k \left(v^\mu - \frac{3}{2}k^\mu \right) \right] + \frac{q^2}{4\pi\mathcal{R}^4} [v^\mu - k^\mu]. \quad (3.67)$$

Tendo em conta as Eqs.(3.62) e o facto de que as componentes da velocidade não dependerem das variáveis angulares tira-se imediatamente que os termos proporcionais a \mathcal{R}^{-4} anulam-se após a integração. Dos restantes termos obtém-se:

$$\frac{dP_{vel}^\mu}{d\tau_R} = \frac{q^2}{2\mathcal{R}} a^\mu. \quad (3.68)$$

Juntando as Eqs.(3.66) e (3.68) obtém-se a variação de momento eletromagnético:

$$\frac{dP_{em}^\mu}{d\tau_R} = \frac{q^2}{2\mathcal{R}} a^\mu + \frac{2}{3}q^2 a^2 v^\mu. \quad (3.69)$$

De modo a encontrar os efeitos do campo criado pela partícula nela própria impõe-se a conservação de energia-momento:

$$\frac{dP_{mec}^\mu}{d\tau_R} + \frac{dP_{em}^\mu}{d\tau_R} = 0, \quad (3.70)$$

onde P_{mec}^μ indica o momento mecânico associado à partícula.

A Eq.(3.70) torna-se uma equação do movimento se for possível escrever P_{mec}^μ em termos das quantidades retardadas. Para tal é necessário postular a forma do momento mecânico. Seria de esperar que $P_{mec}^\mu = m_0 v^\mu$ fosse a escolha natural e correta. No entanto, substituindo esta expressão, juntamente com a Eq.(3.69), na Eq.(3.70) obtém-se a expressão $ma^\mu = -2/3q^2 a^2 v^\mu$, onde $m = m_0 + q^2/(2\mathcal{R})$ seria interpretado como a massa efetiva da partícula. Todavia, multiplicando a expressão que se encontraria por v_μ e fazendo uso do facto de que $v_\mu a^\mu = 0$ obtinha-se que o lado esquerdo seria zero mas não o lado direito. Portanto, existe uma inconsistência na equação. A forma mais simples de resolver o problema é introduzir um termo extra na definição do momento mecânico:

$$P_{mec}^\mu = m_0 v^\mu + A a^\mu, \quad (3.71)$$

onde A é uma constante a ser encontrada. Existem outras possibilidades mas como Dirac indica no artigo original [28]: "...estas são muito mais complicadas que [isto] e dificilmente se espera que se apliquem a uma coisa tão simples como o elétron".

Este é no entanto, um ponto que tem agitado a comunidade científica desde que Dirac sugeriu a dedução original. Muitos artigos se têm debruçado sobre este postulado mas sem real desenvolvimento quase cem anos após a dedução da força de Abraham-Lorentz-Dirac. Outras imposições podem ser assumidas tais como a forma como o tubo do mundo se comporta quando se toma uma partícula pontual, $\mathcal{R} \rightarrow 0$ e, se aproximam as bases do tubo ao mesmo instante retardado [31], ou redefinir a noção de partícula pontual [35]. Porém, todas estas novas abordagens implicam outros postulados que não têm uma fundamentação física como base e portanto, não são mais fundamentais que a dedução de Dirac.

Substituindo as Eqs.(3.69) e (3.71) na Eq.(3.70) obtém-se $ma^\mu = -2/3q^2 a^2 v^\mu - A\dot{a}^\mu$. Multiplicando a expressão anterior por v_μ obtém-se: $A = -2/3q^2$, onde se utilizou a identidade $a^2 = -v_\alpha \dot{a}^\alpha$. Combinando estes resultados encontra-se a expressão para a força de Abraham-Lorentz-Dirac:

$$ma^\mu = \frac{2}{3}q^2 (\dot{a}^\mu - a^2 v^\mu), \quad (3.72)$$

onde m representa a massa efetiva da partícula que reúne contribuições de uma massa intrínseca à partícula m_0 e uma contribuição de natureza eletromagnética:

$$m = m_0 + \frac{q^2}{2\mathcal{R}}. \quad (3.73)$$

Introduzindo a contribuição de uma força exterior a equação de movimento de uma partícula carregada é então dada por

$$ma^\mu = \frac{2}{3}q^2 (\delta_\nu^\mu + v_\nu v^\mu) \dot{a}^\nu + F_{ext}^\mu. \quad (3.74)$$

A Eq.(3.74) reduz-se ao caso clássico estudado no capítulo anterior. Portanto, os problemas encontrados anteriormente de pré-acelerações e acelerações infinitas persistem. Este é um problema que torna a equação de Abraham-Lorentz-Dirac muito pouco verosímil. No entanto, nenhuma inconsistência foi encontrada na dedução teórica. Claro que se podem sempre remeter os problemas encontrados ao facto de ser ter partido de um formalismo clássico - por se partir das equações de Maxwell - e que o eletrão tem uma natureza intrinsecamente quântica. No entanto, filosoficamente uma teoria não deveria sequer conter em si soluções tão dispares da realidade.

4 Ferramentas Matemáticas em Espaços-tempo Curvos

Nos capítulos anteriores foi estudada a origem da *self-force* do ponto de vista histórico. Na física clássica apenas a teoria de Maxwell admitia a existência de auto-interações de partículas com os campos por elas criados dado que, até ao início do século XIX apenas se conheciam dois tipos de interação: a eletromagnética e a gravitacional, onde a última era descrita pela teoria de Newton que previa uma interação instantânea entre as partículas.

Avanços teóricos e tecnológicos permitiram a descoberta de outras interações. A própria interação gravitacional passou a ser abordada de um ponto de vista geométrico, em que, de acordo com a teoria da Relatividade Geral de Einstein, a força gravitacional resulta da manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de energia.

A teoria da Relatividade Geral é um dos pilares da física moderna. O seu desenvolvimento permitiu explicar corretamente uma grande variedade de fenómenos cósmicos suplantando a teoria de Newton. A teoria de Einstein prevê ainda a existência de ondas gravitacionais, isto é, perturbações da geometria do espaço-tempo que se propagam a uma velocidade igual à velocidade da luz. A deteção destas ondas permitiria estudar fenómenos e regiões do Universo que de outra forma estariam completamente inacessíveis. No entanto, devido à constante de Newton ter um valor tão pequeno, a sua deteção direta tem sido extremamente difícil.

O conhecimento do movimento de um corpo no espaço-tempo é de extrema importância na procura das ondas gravitacionais dado que a amplitude destas ondas depende de quantidades características do movimento. Por esta razão, o interesse no estudo da *self-force* reapareceu de modo a analisar a sua influência no movimento dos corpos no espaço-tempo e consequências na emissão de ondas gravitacionais.

Neste capítulo introduzem-se várias ferramentas matemáticas de modo a estudar o problema da *self-force* de origem gravitacional. Começa-se por introduzir a teoria geral dos bitensores, funções tensoriais que dependem de dois pontos do espaço-tempo. Em seguida, expandem-se as noções de distribuições para espaços-tempo curvos, em especial, define-se um funcional invariante de Dirac e uma função em degrau de Heaviside generalizada. Por fim, generaliza-se o sistema de coordenadas retardado construído no capítulo anterior para espaços-tempo curvos.

4.1 A Função de Sygne

Seja M uma variedade diferencial com métrica Riemanniana g . Um objeto natural que caracteriza a geometria é a distância $d(x', x)$ entre dois pontos $x', x \in M$, definida como o ínfimo do comprimento de todas as curvas que ligam estes dois pontos. Designando-se geodésica a curva, única, que minimiza a distância entre quaisquer dois pontos de M .

Este conceito, no entanto, não é generalizável para o caso de variedades Lorentzianas; neste caso, dado um ponto p , apenas se pode garantir a existência de uma vizinhança aberta $U_{x'}$ tal que $\forall x \in U_{x'}$, x' e x estão ligados por uma e uma só geodésica. Nesse caso $U_{x'}$ designa-se a vizinhança normal convexa de x' e é representada por $\mathcal{N}(x')$.

Para concretude, x' será denominado “ponto base”, ao qual se associam os índices $\alpha', \beta', etc.$ e x “ponto de campo”, que tem associados os índices $\alpha, \beta, etc.$ O segmento de geodésica β que liga x' a x é descrito pelas relações $z^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim que toma valores entre λ_0 e λ_1 tal que: $z^\mu(\lambda_0) := x'$ e $z^\mu(\lambda_1) := x$. A um ponto arbitrário na geodésica, z , associam-se os índices $\mu, \nu, etc.$

O campo vetorial t^μ , tangente à geodésica em cada ponto e definido como $t^\mu := dz^\mu/d\lambda$, obedece à equação das geodésicas, $Dt^\mu/d\lambda = 0$.

Pode-se introduzir a função de Synge, uma função tensorial que depende de dois pontos no espaço-tempo, um bitensor:

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_{\mu\nu}(z) t^\mu t^\nu d\lambda, \quad (4.1)$$

onde o integral é tomado ao longo da geodésica β que liga x' a x .

A função de Synge é uma função escalar do ponto de base x' e do ponto de campo x , cujo valor é igual a metade do quadrado da distância geodésica entre x e x' ⁴. $\sigma(x, x')$ está bem definida tanto para o caso Riemanniano como Loretziano e da Eq.(4.1) verifica-se que esta é independente da escolha do parâmetro afim, isto é, é invariante para transformações do tipo $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} = a\lambda + b$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

A Eq.(4.1) pode ser diferenciada em relação a cada um dos seus argumentos. Seja $\sigma_\alpha := \partial\sigma/\partial x^\alpha$ a derivada em relação a x e $\sigma_{\alpha'} := \partial\sigma/\partial x^{\alpha'}$ a derivada em relação a x' . É óbvio que σ_α se comporta como um tensor-1 covariante em relação a operações tensoriais em x mas como um escalar em relação a operações tensoriais em x' . De forma semelhante para $\sigma_{\alpha'}$, mas um escalar em x e um tensor-1 covariante em x' .

Seja $\sigma_{\alpha\beta} := \nabla_\beta \sigma_\alpha$ a derivada covariante de σ_α em relação a x . $\sigma_{\alpha\beta}$ é um tensor -2 covariante em x e um escalar em x' . Dado que σ é um escalar em x , tira-se automaticamente que $\sigma_{\alpha\beta}$ é simétrico: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$.

Definindo $\sigma_{\alpha\beta'} := \partial_{\beta'} \sigma_\alpha = \partial^2 \sigma / \partial x^{\beta'} \partial x^\alpha$ a derivada parcial de σ_α em ordem a x' , este é um vetor dual tanto em x como em x' . Pode-se também definir $\sigma_{\alpha'\beta} := \partial_\beta \sigma_{\alpha'}$, a derivada parcial de $\sigma_{\alpha'}$ em ordem a x . Dado que as derivadas parciais comutam tem-se que: $\sigma_{\beta'\alpha} = \sigma_{\alpha\beta'}$.

De igual forma pode-se definir $\sigma_{\alpha'\beta'} := \nabla_{\beta'} \sigma_{\alpha'}$ a derivada covariante de $\sigma_{\alpha'}$ em relação a x' , um tensor-2 covariante em x' e um escalar em x .

A notação é facilmente estendida a qualquer número de derivadas. Por exemplo $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta'} := \nabla_{\delta'} \nabla_\gamma \nabla_\beta \nabla_\alpha \sigma$ é um tensor-(3, 1) misto, 3 vezes covariante em x e 1 vez contravariante em x' . Este tensor é simétrico nos pares de índices α e β mas não nos pares α e γ nem nos pares β e γ . Como $\nabla_{\delta'}$, na expressão considerada, é uma derivada parcial usual em relação a x' , o bitensor é simétrico em relação a qualquer par de índices que envolvam δ' . Conclui-se então que a ordem dos índices com apóstrofo em relação aos índices sem apóstrofo é irrelevante; assim o mesmo bitensor pode ser escrito como $\sigma_{\delta'\alpha\beta\gamma}$, $\sigma_{\alpha\delta'\beta\gamma}$ ou $\sigma_{\alpha\beta\delta'\gamma}$, apenas garantindo que a ordem dos índices com apóstrofo não é alterada. Na realidade este é um resultado geral para qualquer bitensor :

$$\Omega_{\dots;\beta\alpha'\dots} = \Omega_{\dots;\alpha'\beta\dots}, \quad (4.2)$$

em que as reticências representam qualquer combinação de índices com e sem apóstrofo.

Prossiga-se o estudo da função de Synge analisando como esta se comporta para variações dos seus argumentos.

Considere-se um deslocamento do ponto de campo de $x \rightarrow x + \delta x$. Por conseguinte, $\beta + \delta\beta$ representa o segmento de geodésica único que liga $x + \delta x$ a x' , descrito pelas relações $z^\mu(\lambda) + \delta z^\mu(\lambda)$, onde o parâmetro afim é definido de forma a que também varie de λ_0 a λ_1 na nova geodésica, isto é, $\delta z(\lambda_0) = \delta x' = 0$ e $\delta z(\lambda_1) = \delta x$. Utilizando o método variacional na Eq.(4.1) pode-se calcular a variação $\delta\sigma := \sigma(x + \delta x, x') - \sigma(x, x')$, induzida na função de Synge, tal que:

⁴Por virtude da equação das geodésicas, a quantidade $\varepsilon := g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu$ é constante ao longo da geodésica. Assim a função de Synge é numericamente igual a $\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_0)^2/2$. Se a geodésica é do tipo tempo então λ pode ser colocado igual ao tempo próprio τ , logo $\varepsilon = -1$ e $\sigma = -(\Delta\tau)^2/2$. Se é do tipo espaço pode ser colocado igual à distância própria s , que implica $\varepsilon = 1$ e $\sigma = (\Delta s)^2/2$. Se a geodésica é nula então $\sigma = 0$.

$$\delta\sigma = \Delta\lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \delta z^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \delta z^\lambda \right) d\lambda, \quad (4.3)$$

onde $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$, a derivada em z^μ é feita em ordem a λ e a métrica e a sua derivada são tomadas em β . Integrando o 1º termo por partes obtém-se:

$$\delta\sigma = \Delta\lambda [g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \delta z^\nu]_{\lambda_0}^{\lambda_1} - \Delta\lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (g_{\mu\nu} \ddot{z}^\nu + \Gamma_{\mu\nu\lambda} \dot{z}^\nu \dot{z}^\lambda) \delta z^\mu d\lambda, \quad (4.4)$$

onde a derivada parcial da métrica foi substituída por $\Gamma_{\mu\nu\lambda} := \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\lambda}$ por se ter utilizado o facto de a derivada covariante da métrica ser zero e, no caso da conexão de Levi-Civita, os símbolos de Christoffel são simétricos.

O integral na Eq.(4.4) anula-se pois $z^\mu(\lambda)$ obedece à equação das geodésicas. Também o primeiro termo avaliado em λ_0 é zero pois a variação δz^μ é nula no ponto de base. Obtém-se então $\delta\sigma = \Delta\lambda g_{\alpha\beta} t^\alpha \delta x^\beta$, ou

$$\sigma_\alpha(x, x') = (\lambda_1 - \lambda_0) g_{\alpha\beta} t^\beta. \quad (4.5)$$

À parte do fator $\Delta\lambda$, σ^α é igual ao vetor tangente em x . Substituindo na Eq.(4.5) x por um ponto genérico $z(\lambda)$ em β , obtém-se $\sigma^\mu(z, x') = (\lambda - \lambda_0) t^\mu$.

Um cálculo virtualmente idêntico mostra como σ varia sob a mudança do ponto de base x' , obtendo-se:

$$\sigma_{\alpha'}(x, x') = -(\lambda_1 - \lambda_0) g_{\alpha'\beta'} t^{\beta'}, \quad (4.6)$$

onde a métrica e o vetor tangente são avaliados em x' . À parte do fator $\Delta\lambda$, $\sigma^{\alpha'}$ é igual a menos o vetor tangente à geodésica em x' .

Por fim, podem-se calcular as normas de σ^α e $\sigma^{\alpha'}$. De acordo com a Eq.(4.5), tem-se que $g_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta = (\lambda_1 - \lambda_0)^2 g_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$; que comparando com a Eq.(4.1) indica:

$$g^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta = 2\sigma. \quad (4.7)$$

Da mesma forma,

$$g^{\alpha'\beta'} \sigma_{\alpha'} \sigma_{\beta'} = 2\sigma. \quad (4.8)$$

4.2 Limites de Coincidência

Estude-se agora o comportamento da função de Synge e das suas derivadas no limite em que x tende para x' . Para tal introduz-se a notação

$$[\Omega_{\dots}] = \lim_{x \rightarrow x'} \Omega_{\dots}(x, x'),$$

para designar o limite de qualquer bitensor $\Omega_{\dots}(x, x')$ quando x tende para x' , o limite de coincidência do bitensor. Pode-se assumir que o limite de coincidência é uma função tensorial única do ponto de base x' , independente da direção segundo a qual se toma o limite; por outras palavras, o limite é tomado fazendo $\lambda \rightarrow \lambda_0$ depois de avaliar $\Omega_{\dots}(z, x')$ como uma função de λ numa dada geodésica β . Desta forma, assume-se então que o limite de coincidência não depende da escolha de geodésica.

Das Eqs.(4.1), (4.5) e (4.6) obtém-se automaticamente

$$\begin{aligned} [\sigma] &= 0, \\ [\sigma_\alpha] &= [\sigma_{\alpha'}] = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mais resultados podem ser obtidos por diferenciação das Eqs.(4.7) e (4.8). A Eq.(4.7) implica $\sigma_\gamma = g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_{\beta\gamma} = \sigma^\beta\sigma_{\beta\gamma}$. Utilizando a Eq.(4.5) obtém-se $(g_{\beta\gamma} - \sigma_{\beta\gamma})t^\beta = 0$. Como indicado anteriormente, assume-se que o limite de coincidência não depende da geodésica considerada logo o vetor tangente é arbitrário, assim, $[\sigma_{\alpha\beta}] = g_{\alpha'\beta'}$. De modo a encontrar outros limites de coincidência é mais eficiente utilizar a regra de Synge, cuja demonstração é feita no **Anexo B**. No caso da função de Synge e suas derivadas a regra indica que

$$[\sigma_{\dots\alpha'}] = [\sigma_{\dots}]_{;\alpha'} - [\sigma_{\dots\alpha}]. \quad (4.10)$$

Assim, segundo a Eq.(4.10) tem-se que $[\sigma_{\alpha\beta'}] = [\sigma_{\alpha}]_{;\beta'} - [\sigma_{\alpha\beta}]$. Tendo em conta as Eqs.(4.9) e $[\sigma_{\alpha\beta}] = g_{\alpha'\beta'}$ obtém-se $[\sigma_{\alpha\beta'}] = -g_{\alpha'\beta'}$. Utilizando o mesmo raciocínio obtém-se os resultados:

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha\beta}] &= [\sigma_{\alpha'\beta'}] = g_{\alpha'\beta'}, \\ [\sigma_{\alpha\beta'}] &= [\sigma_{\alpha'\beta}] = -g_{\alpha'\beta'}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Destas relações tira-se que $[\sigma_\alpha^\alpha] = 4$, no caso de uma espaço-tempo de dimensão 4.

Os limites de coincidência da Eq.(4.11) partiram da derivação da relação $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^\delta\sigma_\delta$. Diferenciando duas vezes esta equação tira-se que $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\beta\gamma}^\delta\sigma_\delta + \sigma_{\alpha\beta}^\delta\sigma_{\delta\gamma} + \sigma_{\alpha\gamma}^\delta\sigma_{\delta\beta} + \sigma_\alpha^\delta\sigma_{\delta\beta\gamma}$, que no limite de coincidência se reduz a

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma}] = [\sigma_{\alpha\beta}^\delta]g_{\delta'\gamma'} + [\sigma_{\alpha\gamma}^\delta]g_{\delta'\beta'} + \delta_{\alpha'}^{\delta'}[\sigma_{\delta\beta\gamma}]. \quad (4.12)$$

Por outro lado, diferenciando $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^\delta\sigma_\delta$ na ordem contrária e somando o respetivo limite de coincidência à Eq.(4.12) obtém-se $[\sigma_{\alpha\beta\gamma}] + [\sigma_{\alpha\gamma\beta}] = 0$, por consideração das simetrias de $\sigma_{\alpha\beta}$. Esta relação pode então ser utilizada para calcular o limite de coincidência da equação $\sigma_{\alpha\gamma\beta} = \sigma_{\alpha\beta\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma}^\delta\sigma_\delta$, que se obtém da definição do tensor de Riemann, tal que $2[\sigma_{\alpha\beta\gamma}] = R_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\delta'}[\sigma_\delta]$. Utilizando a Eq.(4.9) conclui-se:

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma}] = [\sigma_{\alpha\beta\gamma'}] = [\sigma_{\alpha\beta'\gamma}] = [\sigma_{\alpha'\beta'\gamma}] = 0, \quad (4.13)$$

onde os últimos três resultados são encontrados utilizando a regra de Synge.

Por fim, o último limite de coincidência que será necessário calcular corresponde à quarta derivada da função de Synge. O cálculo é bastante mais longo que os anteriores mas as manipulações são em tudo semelhantes, obtendo-se no final:

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}] = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} + R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'}); \quad (4.14)$$

o qual pode ser utilizado para encontrar os limites de coincidência para qualquer combinação de índices relativos a x e x' , tendo em conta a regra de Synge.

4.3 Propagador Paralelo

Outra ferramenta muito útil que é necessário introduzir é o operador de transporte paralelo, também conhecido na literatura como bi-vetor de deslocamento paralelo.

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana e z um ponto em M . Se a métrica g estiver definida no ponto z é sempre possível definir uma base ortonormada nesse ponto. A base é escolhida de tal forma que nesse ponto a métrica é diagonalizada e reduzida à métrica de Minkowski⁵.

Assim sendo, pode-se introduzir uma base ortonormada $(e_a^\mu)(z)$, com $a = 0, 1, 2, 3$, transportada paralelamente ao longo do segmento de geodésica β que liga x a x' . Por conseguinte da definição de

⁵A existência de uma base ortonormada num ponto da variedade consiste em definir um referencial localmente inercial nesse ponto, em que as componentes de um tensor nessa base correspondem às componentes desse tensor medidas por um observador em repouso nesse referencial.

base ortonormada os vetores que a constituem têm que verificar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu &= \eta_{ab}, \\ \frac{D e_a^\mu}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tem-se ainda a relação de completude

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (4.16)$$

Para cada base de vetores ortonormados existe uma base dual de covetores $e_\mu^a(z)$ definidos como

$$e_\mu^a := \eta^{ab} g_{\mu\nu} e_b^\nu, \quad (4.17)$$

a qual é também transportada paralelamente ao longo de β .

A relação de completude para os covetores da base dual é dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (4.18)$$

A partir das definições verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} e_\mu^a e_b^\mu &= \delta_b^a, \\ e_\mu^a e_a^\nu &= \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Estas relações são verificadas em todos os pontos de β . Em particular estas são verificadas nos pontos x e x' .

Qualquer campo vectorial $A^\mu(z)$ em β pode ser decomposto na base (e_a^μ) como $A^\mu = A^a e_a^\mu$, cujas componentes nesta base são dadas por $A^a = A^\mu e_\mu^a$.

Se A^μ for transportado paralelamente ao longo da geodésica então os coeficientes A^a são constantes. O vetor em x pode assim ser expresso como $A^\alpha = (A^{\alpha'} e_{\alpha'}^\alpha) e_\alpha^\alpha$, ou

$$\begin{aligned} A^\alpha(x) &= g_{\alpha'}^\alpha(x, x') A^{\alpha'}(x'), \\ g_{\alpha'}^\alpha(x, x') &:= e_\alpha^\alpha(x) e_{\alpha'}^\alpha(x'), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $g_{\alpha'}^\alpha$ é designado o propagador paralelo. Basicamente $g_{\alpha'}^\alpha(x, x')$ transporta paralelamente um vetor definido em x' até x , ao longo da única geodésica que liga estes dois pontos. Da mesma forma se tem

$$\begin{aligned} A^{\alpha'}(x') &= g_{\alpha'}^{\alpha'}(x', x) A^\alpha(x) \\ g_{\alpha'}^{\alpha'}(x', x) &:= e_{\alpha'}^{\alpha'}(x') e_\alpha^{\alpha'}(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Verifica-se então que $g_{\alpha'}^{\alpha'}$ realiza a operação inversa, transporta paralelamente um vetor definido em x até x' . Desta forma,

$$\begin{aligned} g_{\alpha'}^\alpha g_{\beta'}^{\alpha'} &= \delta_{\beta'}^\alpha, \\ g_{\alpha'}^{\alpha'} g_{\beta'}^\alpha &= \delta_{\beta'}^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas relações expressam formalmente o facto de que $g_{\alpha'}^{\alpha'}$ é o inverso de $g_{\alpha'}^\alpha$.

A relação $g_{\alpha'}^\alpha = e_\alpha^\alpha e_{\alpha'}^\alpha$ pode também ser expressa como $g_{\alpha'}^\alpha = e_{\alpha'}^\alpha e_\alpha^\alpha$, isto revela que

$$\begin{aligned} g_{\alpha'}^{\alpha'}(x, x') &= g_{\alpha'}^{\alpha'}(x', x), \\ g_{\alpha'}^\alpha(x', x) &= g_{\alpha'}^\alpha(x, x'). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Portanto, a ordem dos índices e dos argumentos no propagador paralelo é irrelevante. Assim, adota-se a notação: o índice mais atrás no propagador paralelo indica o ponto no espaço-tempo de onde se parte, e.g., $g_{\alpha}^{\alpha'}(x', x)$ indica a variação desde o ponto x' até ao ponto x ao longo da geodésica única que une esses pontos.

A ação do propagador paralelo em tensores de ordem arbitrária é de fácil percepção.

Seja $A^{\alpha\beta}$ um tensor-2 contravariante em x . Utilizando as técnicas anteriores, mostra-se que este pode ser obtido por transporte paralelo ao longo de β a partir de x' através da relação

$$A^{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha'}^{\alpha}(x', x) g_{\beta'}^{\beta}(x', x) A^{\alpha'\beta'}(x'). \quad (4.24)$$

São então necessárias duas ocorrências do propagador paralelo, uma para cada índice tensorial. Dado que a métrica é transportada paralelamente ao longo de β , um caso particular da Eq.(4.24) é $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'}^{\alpha'} g_{\beta'}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}$.

Como os vetores e_{α}^{μ} são transportados paralelamente ao longo de β estes satisfazem $e_{\alpha;\beta}^{\alpha} \sigma^{\beta} = 0$ em x e $e_{\alpha';\beta'}^{\alpha'} \sigma^{\beta'} = 0$ em x' . Isto implica imediatamente

$$\begin{aligned} g_{\alpha';\beta}^{\alpha} \sigma^{\beta} &= g_{\alpha';\beta'}^{\alpha} \sigma^{\beta'} = 0, \\ g_{\alpha;\beta}^{\alpha'} \sigma^{\beta} &= g_{\alpha;\beta'}^{\alpha'} \sigma^{\beta'} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dado que $t^{\mu} = dz^{\mu}/d\lambda$ é tangente à geodésica que liga x' a x tira-se que $t^{\alpha} = g_{\alpha'}^{\alpha} t^{\alpha'}$. Utilizando as Eqs.(4.5) e (4.6) obtém-se a relação

$$\sigma_{\alpha} = -g_{\alpha}^{\alpha'} \sigma_{\alpha'}. \quad (4.26)$$

Por fim, é útil estudar os limites de coincidência do propagador paralelo e suas derivadas.

As relações de complitude das Eqs.(4.16) e (4.18) e a Eq.(4.20) implicam

$$[g_{\beta'}^{\alpha'}] = \delta_{\beta'}^{\alpha'}. \quad (4.27)$$

Outras relações de coincidência obtêm-se diferenciando as Eqs.(4.25). Por exemplo, $g_{\alpha';\beta}^{\alpha} \sigma^{\beta} = 0$ implica $g_{\alpha';\beta\gamma}^{\alpha} \sigma^{\beta} + g_{\alpha';\beta}^{\alpha} \sigma_{\gamma}^{\beta} = 0$. Tomando o limite de coincidência e tendo em conta a Eq.(4.9) obtém-se

$$[g_{\beta';\gamma}^{\alpha}] = [g_{\beta';\gamma'}^{\alpha}] = 0, \quad (4.28)$$

onde o segundo resultado obtém-se do primeiro por aplicação da regra de Sygne.

Diferenciando mais uma vez a Eq.(4.25) e tomando o limite obtém-se $[g_{\beta';\gamma\delta}^{\alpha}] + [g_{\beta';\delta\gamma}^{\alpha}] = 0$, que, utilizando a definição do tensor de Riemann, permite escrever: $2[g_{\beta';\gamma\delta}^{\alpha}] + R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\alpha'} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} [g_{\beta';\gamma\delta}^{\alpha}] &= -\frac{1}{2} R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\alpha'}; & [g_{\beta';\gamma\delta'}^{\alpha}] &= \frac{1}{2} R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\alpha'}; \\ [g_{\beta';\gamma'\delta}^{\alpha}] &= -\frac{1}{2} R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\alpha'}; & [g_{\beta';\gamma'\delta'}^{\alpha}] &= \frac{1}{2} R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\alpha'}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

tendo-se utilizado a regra de Sygne de modo a obter os restantes resultados.

4.4 Expansão Covariante

O limite de coincidência de um bitensor é uma quantidade importante no entanto, só por si indica muito pouco em relação ao bitensor. Seria mais proveitoso se o limite de coincidência pudesse ser utilizado

para reconstruir o bitensor numa vizinhança do ponto de base. Para tal, apresenta-se um método sistemático de expansão de um bitensor perto da coincidência, comumente designado por Expansão Covariante.

Dado um bitensor $\Omega_{\alpha'\beta'}(x, x')$ pretende-se fazer a sua expansão em série perto da coincidência em termos de potências de $-\sigma^{\alpha'}(x, x')$, a analogia mais fiel em espaço-tempo curvo à quantidade $(x - x')^\alpha$ no espaço-tempo plano. Em termos concretos, considere-se um bitensor-2 e assumase por agora que os índices tensoriais se referem ao ponto base x' .

Assim a expansão toma a forma:

$$\Omega_{\alpha'\beta'}(x, x') = A_{\alpha'\beta'} + A_{\alpha'\beta'\gamma'}\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\varepsilon^3), \quad (4.30)$$

onde os “coeficientes da expansão”: $A_{\alpha'\beta'}, A_{\alpha'\beta'\gamma'}, A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$, etc, são tensores usuais em x' . Na Eq.(4.30) ε indica o tamanho típico da componente $\sigma^{\alpha'}$.

De modo a encontrar os coeficientes da expansão utiliza-se o método introduzido por Bryce DeWitt [26]:

1. Toma-se a derivada covariante da expressão da expansão do bitensor, aplicando-se o mesmo número de derivadas covariantes que a ordem do coeficiente que se procura;
2. Substituem-se todos os termos conhecidos pelo seus limites de coincidência;
3. Reorganizam-se as derivadas covariantes utilizando a definição do tensor de Riemann;
4. Toma-se o limite de coincidência da expressão final;

No caso da Eq.(4.30) obtêm-se os primeiros coeficientes da expansão:

$$\begin{aligned} A_{\alpha'\beta'} &= [\Omega_{\alpha'\beta'}], \\ A_{\alpha'\beta'\gamma'} &= [\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'}] - A_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= [\Omega_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'}] - A_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - A_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - A_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Suponha-se agora que o bitensor considerado é $\Omega_{\alpha'\beta}$, com um índice referente a x' e outro a x . O procedimento anterior pode ser aplicado diretamente se se introduzir um bitensor auxiliar $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'} := g^{\beta'}_{\beta}\Omega_{\alpha'\beta}$, cujos índices se referem ao ponto base. O novo bitensor pode ser expandido como na Eq.(4.30) e, utilizando o propagador paralelo inverso, obtêm-se a expansão do bitensor inicial

$$\Omega_{\alpha'\beta}(x, x') = g^{\beta'}_{\beta} \left(B_{\alpha'\beta'} + B_{\alpha'\beta'\gamma'}\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (4.32)$$

Os coeficientes da expansão podem ser então obtidos a partir dos limites de coincidência de $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'}$ e suas derivadas ou, mais convenientemente, a partir do bitensor original utilizando a relação $\Omega_{\alpha'\beta} = g^{\beta'}_{\beta}\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'}$. Tirando partido dos resultados da Eq.(4.27) a (4.29) encontram-se os primeiros termos da expansão:

$$\begin{aligned} B_{\alpha'\beta'} &= [\Omega_{\alpha'\beta}], \\ B_{\alpha'\beta'\gamma'} &= [\Omega_{\alpha'\beta;\gamma'}] - B_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ B_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= [\Omega_{\alpha'\beta;\gamma'\delta'}] - \frac{1}{2}B_{\alpha'\rho'}R^{\rho'}_{\beta'\gamma'\delta'} - B_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - B_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - B_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O mesmo método pode ser utilizado no caso de um bitensor com ambos os índices referentes ao ponto de campo x . Introduce-se o bitensor auxiliar $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'} := g^{\alpha}_{\alpha'}g^{\beta}_{\beta'}\Omega_{\alpha\beta}$ e faz-se a expansão na forma da

Eq.(4.30). Aplicando o propagador paralelo inverso obtém-se a forma para o bitensor inicial:

$$\Omega_{\alpha\beta}(x, x') = g_{\alpha}^{\alpha'} g_{\beta}^{\beta'} \left(C_{\alpha'\beta'} + C_{\alpha'\beta'\gamma'} \sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2} C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (4.34)$$

Com os coeficientes da expansão dados por

$$\begin{aligned} C_{\alpha'\beta'} &= [\Omega_{\alpha\beta}], \\ C_{\alpha'\beta'\gamma'} &= [\Omega_{\alpha\beta;\gamma'}] - C_{\alpha'\beta';\gamma'}, \\ C_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} &= [\Omega_{\alpha\beta;\gamma'\delta'}] + \frac{1}{2} C_{\alpha'\rho'} R_{\beta'\gamma'\delta'}^{\rho'} + \frac{1}{2} C_{\rho'\beta'} R_{\alpha'\gamma'\delta'}^{\rho'} - C_{\alpha'\beta';\gamma'\delta'} - C_{\alpha'\beta'\gamma';\delta'} - C_{\alpha'\beta'\delta';\gamma'}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Os resultados gerais encontrados permitem encontrar expressões aproximadas válidas perto da coincidência dos bitensores $\sigma_{\alpha'\beta'}$, $\sigma_{\alpha'\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$. A substituição é feita imediatamente obtendo-se:

$$\sigma_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{3} R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} + O(\varepsilon^3), \quad (4.36)$$

$$\sigma_{\alpha'\beta} = -g_{\beta}^{\beta'} \left(g_{\alpha'\beta'} + \frac{1}{6} R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} \right) + O(\varepsilon^3), \quad (4.37)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = g_{\alpha}^{\alpha'} g_{\beta}^{\beta'} \left(g_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{3} R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (4.38)$$

O método introduzido pode ser facilmente estendido a tensores de outras ordens. Em particular, pode-se adaptar o método de modo a expandir perto da coincidência o propagador paralelo, tal que:

$$\begin{aligned} g_{\beta'}^{\alpha';\gamma'} &= \frac{1}{2} g_{\alpha'}^{\alpha} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\delta'} + O(\varepsilon^2), \\ g_{\beta'}^{\alpha';\gamma} &= \frac{1}{2} g_{\alpha'}^{\alpha} g_{\gamma'}^{\gamma} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\delta'} + O(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (4.39)$$

resultados que serão muito úteis no capítulo seguinte.

4.5 Determinante de Van Vleck

Para finalizar o estudo da teoria geral dos bitensores introduz-se mais uma ferramenta matemática: o determinante de Van Vleck, $\Delta(x, x')$, definido como:

$$\begin{aligned} \Delta(x, x') &:= \det \left[\Delta_{\beta'}^{\alpha'}(x, x') \right], \\ \Delta_{\beta'}^{\alpha'}(x, x') &:= -g_{\alpha}^{\alpha'}(x, x') \sigma_{\beta'}^{\alpha}(x, x'). \end{aligned} \quad (4.40)$$

As Eqs.(4.11) e (4.27) implicam que $[\Delta_{\beta'}^{\alpha'}] = \delta_{\beta'}^{\alpha'}$ e $[\Delta] = 1$. Por outro lado, a Eq.(4.37) permite encontrar os primeiros termos da expansão covariante de $\Delta_{\beta'}^{\alpha'}(x, x')$, tal que:

$$\Delta_{\beta'}^{\alpha'} = \delta_{\beta'}^{\alpha'} + \frac{1}{6} R_{\gamma'\beta'\delta'}^{\alpha'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} + O(\varepsilon^3). \quad (4.41)$$

Utilizando a seguinte igualdade, válida para uma matriz quadrada com cujo determinante é aproximadamente 1: $\det(1 + a) = 1 + Tr(a) + O(a^2)$, tira-se

$$\Delta = 1 + \frac{1}{6} R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\alpha'} \sigma^{\beta'} + O(\varepsilon^3). \quad (4.42)$$

É possível demonstrar [55] que o determinante de Van Vleck obedece à equação:

$$\frac{1}{\Delta} (\Delta \sigma^\alpha)_{;\alpha} = 4, \quad (4.43)$$

a qual pode ser igualmente escrita como $(\ln \Delta)_{;\alpha} \sigma^\alpha = 4 - \sigma^\alpha_{;\alpha}$.

4.6 Distribuições em Espaço-tempo Curvo

O cálculo das funções de Green, como visto nos capítulos anteriores, baseia-se fortemente na teoria das distribuições. No entanto, os métodos distribucionais utilizados anteriormente estão limitados a espaços-tempo planos; assim, é necessária uma generalização desses métodos definindo um funcional invariante de Dirac e uma função em degrau de Heaviside num espaço-tempo quadridimensional com métrica g_{ab} .

Comece-se por ter em conta o conceito de distribuição e a definição de funcional de Dirac em \mathbb{R} .

Seja f uma função com domínio em \mathbb{R} de suporte compacto. Suponha-se que existem todas as derivadas parciais de $f(x)$ e que são contínuas. Esta classe de funções é designada $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. O conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tem a estrutura de um espaço vetorial e é designado por espaço das funções de teste.

Define-se o funcional linear contínuo ou distribuição como a aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ que obedece a:

1. $\mathcal{F}(af) = a\mathcal{F}(f), \forall a \in \mathbb{C} \text{ e } f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$;
2. $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g), \forall f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$;
3. $\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f), \forall \{f_n\} \rightarrow f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$;

Em particular, considere-se o funcional que verifica a condição:

$$F_\delta(f) := f(0), \quad (4.44)$$

onde δ é uma função localmente integrável e contínua em \mathbb{R} . Pode-se demonstrar [27] que a distribuição que verifica a Eq.(4.44) é dada por:

$$F_\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') f(x') dx' = f(0). \quad (4.45)$$

A distribuição \mathcal{F}_δ é designada *Distribuição Delta de Dirac* gerada pela função generalizada δ . Como é uso corrente, confunde-se a distribuição $F_\delta(f)$ com a função generalizada $\delta(x)$ e, por abuso de linguagem, diz-se que $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac.

Pode-se então definir um funcional invariante de Dirac num espaço-tempo curvo quadridimensional, $\delta_4(x, x')$, como a distribuição que verifica as condições equivalentes à Eq.(4.45) num espaço-tempo com métrica $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \delta_4(x, x') \sqrt{-g} d^4x &= f(x'), \\ \int_{V'} f(x') \delta_4(x, x') \sqrt{-g'} d^4x' &= f(x), \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde f é uma função de teste⁶, V é uma região quadridimensional que contém x' e V' é uma região quadridimensional que contém x ⁷.

⁶Note-se que f como uma função de teste está bem definida no caso de uma variedade Lorentziana pois em particular é uma variedade diferenciável.

⁷Em momento algum se tentou definir a conceito de distribuição numa variedade. Apenas se tentou introduzir a necessidade

As Eqs.(4.46) implicam que $\delta_4(x, x')$ é simétrico nos seus argumentos. Tendo em conta a Eq.(4.44) e a identidade distribucional $f(x)\delta_4(x, x') = f(x')\delta_4(x, x')$ tira-se que

$$\delta_4(x, x') = \frac{\delta_4(x - x')}{\sqrt{-g}} = \frac{\delta_4(x - x')}{\sqrt{-g'}}, \quad (4.47)$$

onde $\delta_4(x - x') = \delta(x^0 - x'^0)\delta(x^1 - x'^1)\delta(x^2 - x'^2)\delta(x^3 - x'^3)$ é o funcional de Dirac quadridimensional usual.

Da definição da distribuição $\delta_4(x, x')$, Eq.(4.46), tira-se

$$\Omega_{\dots}(x, x')\delta_4(x, x') = [\Omega_{\dots}]\delta_4(x, x'). \quad (4.48)$$

Faça-se agora o seguinte ansatz:

$$\begin{aligned} (g_{\alpha'}^{\alpha}(x, x')\delta_4(x, x'))_{;\alpha} &= -\partial_{\alpha'}\delta_4(x, x'), \\ (g_{\alpha}^{\alpha'}(x', x)\delta_4(x, x'))_{;\alpha'} &= -\partial_{\alpha}\delta_4(x, x'). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Verifique-se a primeira identidade integrando cada termo da igualdade com uma função de teste $f(x)$, escalar em relação às coordenadas x :

$$\int_V f(x)(g_{\alpha'}^{\alpha}\delta_4(x, x'))_{;\alpha}\sqrt{-g}d^4x = \oint_{\partial V} f(x)g_{\alpha'}^{\alpha}\delta_4(x, x')d\Sigma_{\alpha} - [f,_{\alpha}g_{\alpha'}^{\alpha}] = -\partial_{\alpha'}f(x'), \quad (4.50)$$

onde no primeiro passo se utilizou o teorema de Gauss. Por outro lado,

$$-\int_V f(x)\partial_{\alpha'}\delta_4(x, x')\sqrt{-g}d^4x = -\partial_{\alpha'}f(x'). \quad (4.51)$$

Portanto, a primeira relação das Eqs.(4.49) é verificada. Os cálculos para a segunda relação são virtualmente idênticos.

De modo a introduzir distribuições definidas no cone de luz é necessário impingir que $x \in \mathcal{N}(x')$, isto é, que o ponto x' esteja ligado a x por uma única geodésica.

Seja $\theta_+(x, \Sigma)$ uma função em degrau de Heaviside generalizada definida de modo a ser 1 quando x pertence ao futuro da hipersuperfície do tipo espaço Σ e 0 caso contrário. Da mesma forma, define-se $\theta_-(x, \Sigma) := 1 - \theta_+(x, \Sigma)$ de modo a ser 1 quando x pertence ao passado de Σ e 0 caso contrário.

Pode-se então definir uma função em degrau no cone de luz:

$$\theta_{\pm}(-\sigma) = \theta_{\pm}(x, \Sigma)\theta(-\sigma), x' \in \Sigma, \quad (4.52)$$

onde $\theta_+(-\sigma)$ é 1 se x pertence a $I^+(x')$, o futuro cronológico de x' e, 0 caso contrário. $\theta_-(-\sigma)$ é 1 se x pertence a $I^-(x')$, o passado cronológico de x' e, 0 caso contrário. A escolha da hipersuperfície é irrelevante desde que Σ seja do tipo espaço e contenha o ponto x' . Note-se ainda que $\theta_+(-\sigma) + \theta_-(-\sigma) = \theta(-\sigma)$ ⁸.

É útil introduzir os funcionais de Dirac no cone de luz definidos como:

$$\delta_{\pm}(\sigma) = \theta_{\pm}(x, \Sigma)\delta(\sigma), x' \in \Sigma, \quad (4.53)$$

de generalizar o conceito de funcional de Dirac para um espaço-tempo com métrica $g_{\alpha\beta}$. A ideia de distribuição numa variedade pode ser vista na Ref.[36].

⁸Como indicado na nota de rodapé (4) a função de Synge varia de sinal conforme x e x' estejam relacionados por geodésicas do tipo tempo, espaço ou luz; portanto, $\theta(-\sigma)$ está bem definido como uma função em degrau de Heaviside.

tal que $\delta_+(\sigma)$, quando visto como uma função de x , tem suporte no cone de luz do futuro de x' e, $\delta_-(\sigma)$ tem suporte no cone de luz do passado. Note-se que $\delta_+(\sigma) + \delta_-(\sigma) = \delta(\sigma)$.

As distribuições $\theta_\pm(-\sigma)$ e $\delta_\pm(\sigma)$ não estão bem definidas em $x = x'$, logo não podem ser diferenciadas nesse ponto. Este problema pode ser evitado deslocando σ por uma quantidade ε positiva tão pequena quanto se queira. Podem-se assim tomar as distribuições $\theta_\pm(-\sigma - \varepsilon)$ e $\delta_\pm(\sigma + \varepsilon)$ nos cálculos e no final tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Com este deslocamento as distribuições do cone de luz podem ser diferenciadas sem problemas em relação a σ .

Por definição, as distribuições $\delta_\pm(\sigma)$ obedecem à seguinte identidade distribucional

$$(\sigma + \varepsilon) \delta_\pm(\sigma + \varepsilon) = 0. \quad (4.54)$$

Diferenciando sucessivamente a Eq.(4.54) obtêm-se as seguintes identidades:

$$\delta_\pm(\sigma + \varepsilon) + (\sigma + \varepsilon) \delta'_\pm(\sigma + \varepsilon) = 0, \quad (4.55)$$

$$2\delta'_\pm(\sigma + \varepsilon) + (\sigma + \varepsilon) \delta''_\pm(\sigma + \varepsilon) = 0. \quad (4.56)$$

Tira-se também que $\theta'_\pm(-\sigma - \varepsilon) = \theta_\pm(x, \Sigma) \theta'(-\sigma - \varepsilon) = -\theta_\pm(x, \Sigma) \delta(\sigma + \varepsilon) = -\delta_\pm(\sigma + \varepsilon)$, onde se utilizou o facto que a derivada da distribuição gerada pela função de Heaviside é igual à distribuição δ de Dirac.

Por fim, indicam-se as seguintes igualdades

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \delta_\pm(\sigma + \varepsilon) = 0, \quad (4.57)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \delta'_\pm(\sigma + \varepsilon) = 0, \quad (4.58)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \delta''_\pm(\sigma + \varepsilon) = 2\pi \delta_4(x, x'), \quad (4.59)$$

cuja demonstração pode ser vista na Ref.[55], em que se utiliza o facto de as Eqs.(4.57), (4.58) e (4.59) serem relações escalares e se forem verificadas num sistema de coordenadas particular, são válidas em qualquer sistema de coordenadas. O Sistema de Coordenadas de Riemann[55] torna a demonstração muito simples; no entanto, para evitar introduzir tal sistema de coordenadas, a demonstração é delegada para a referência indicada que cobre o assunto na totalidade.

4.7 Coordenadas Retardadas em Espaço-tempo Curvo

De modo a finalizar o capítulo e prosseguir com o estudo da *self-force* de origem gravitacional é necessário generalizar o conceito e construção das coordenadas retardadas introduzidas anteriormente para espaços-tempo curvos.

A motivação para a introdução destas coordenadas mantém-se a mesma: construir um sistema de coordenadas que expresse de forma natural a relação causal entre um campo e a fonte que lhe deu origem; no entanto, ao contrário do caso de um espaço-tempo plano, em espaço-tempo curvo não é possível mapear todo o cone de luz pois pode existir mais do que uma geodésica que ligue o ponto de base a um ponto no seu cone de luz. Desta forma, a definição deste sistema de coordenada apenas faz sentido na vizinhança convexa de cada ponto do espaço-tempo.

Considere-se uma partícula que se move no espaço-tempo com linha do mundo acelerada γ , uma curva do tipo tempo descrita por relações $z^\mu(\tau)$, cujo vetor tangente é dado por $v^\mu = dz^\mu/d\tau$ e o seu vetor aceleração dado por $a^\mu = Dv^\mu/d\tau$.

Seja x um ponto no espaço-tempo na vizinhança convexa de γ e β a geodésica nula, única, direcionada para o futuro que liga um ponto em γ , $x' := z(\tau_R)$, a x .

Define-se em x' uma base de vetores ortonormados $(e_0^{\alpha'}, e_a^{\alpha'})$, tal que $e_0^{\alpha'} := v^{\alpha'}$, isto é, um dos vetores da base coincide com a quadrivelocidade da partícula e os restantes vetores estão definidos numa hipersuperfície normal a $v^{\alpha'}$.

Ressalva-se a mudança de notação em comparação com a secção 4.3 onde os índices a, b, c, etc , variavam de 0 a 3. Nesta secção tal notação é abandonada pois no sistema de coordenadas retardadas um dos vetores da base está definido *à priori*, sendo os restantes vetores identificados por índices com letras latinas que passam a variar de 1 a 3.

Os vetores da base são transportados de Fermi-Walker ao longo de γ ⁹:

$$\frac{De_i^\mu}{d\tau} = (v^\mu a_\nu - a^\mu v_\nu) e_i^\nu, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad (4.60)$$

como descrito no **Anexo C**.

Pode-se ainda definir a base do espaço dual $(e_{\alpha'}^0, e_{\alpha'}^a)$, com $e_{\alpha'}^0 = -v_{\alpha'}$ e $e_{\alpha'}^a = \delta^{ab} g_{\alpha'\beta'} e_b^{\beta'}$.

Dada uma base em x' pode-se construir uma base (e_α^0, e_α^a) e a sua dual (e_α^0, e_α^a) em x fazendo o transporte paralelo ao longo de β . Para tal é útil definir o propagadores paralelo e o seu inverso neste sistema de coordenadas. Utilizando as Eqs.(4.20) e (4.21) obtém-se então:

$$\begin{aligned} g_{\alpha'\alpha}(x', x) &= -e_0^\alpha v_{\alpha'} + e_a^\alpha e_{\alpha'}^a, \\ g_{\alpha\alpha'}(x, x') &= v_{\alpha'} e_\alpha^0 + e_a^{\alpha'} e_\alpha^a. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Definidos os elementos geométricos pode-se prosseguir com a construção do sistema de coordenadas.

O sistema de coordenadas retardadas é definido como:

$$\begin{aligned} \hat{x}^0 &= \tau_R; \\ \hat{x}^a &= -e_{\alpha'}^a \sigma^{\alpha'}; \\ \sigma(x, x') &= 0; \end{aligned} \quad (4.62)$$

em que a última imposição segue do facto de os dois pontos x' e x estarem ligados por uma geodésica nula.

Utilizando o facto de $\sigma^{\alpha'}$ ser um vetor nulo pode-se construir a seguinte quantidade escalar

$$\mathcal{R} = \sqrt{\delta_{ab} \hat{x}^a \hat{x}^b} = v_{\alpha'} \sigma^{\alpha'}. \quad (4.63)$$

Em espaço-tempo plano a geodésica que liga x' a x é simplesmente uma linha reta e a função de Synge é dada por $\sigma = \eta_{ab} (x - x')^\alpha (x - x')^\beta / 2$, portanto, $\sigma^{\alpha'} = -(x - x')^{\alpha'}$. Num MCLF na linha do mundo tem-se que: $\mathcal{R} = t - t'$, ou seja, \mathcal{R} representa a distância no espaço-tempo entre x' e x , medida neste referencial. Em espaço-tempo curvo a quantidade $\mathcal{R} = v_{\alpha'} \sigma^{\alpha'}$ pode continuar a ser designada como a distância retardada entre x e um ponto na linha do mundo da partícula.

Definido o sistema de coordenadas podem-se calcular as componentes de $\sigma^{\alpha'} = \sigma^0 e_0^{\alpha'} + \sigma^a e_a^{\alpha'}$. Da

⁹O transporte de Fermi-Walker generaliza o transporte paralelo, onde o último apenas descreve como quantidades variam ao longo de uma geodésica. O transporte de Fermi-Walker define a forma como as quantidades variam ao longo de linhas do mundo de partículas aceleradas.

Eq.(4.63) tira-se que $\mathcal{R} = -\sigma^0$ e das Eqs.(4.62) obtêm-se as componentes espaciais. Assim

$$\sigma^{\alpha'} = -\mathcal{R} \left(v^{\alpha'} + \Omega^a e_a^{\alpha'} \right), \quad (4.64)$$

onde $\Omega^a := \hat{x}^a / \mathcal{R}$ é um vetor espacial unitário.

Apesar de o sistema de Coordenadas Retardadas ser definido pelas Eqs.(4.62) estas não permitem uma interpretação geométrica clara do sistema de coordenadas. Para tal, procure-se como variam as coordenadas de um ponto de campo no cone de luz futuro de um ponto de base para variações desse ponto de campo.

Mantendo a condição de que x' e x estejam ligados por uma geodésica nula pode-se considerar $\mathcal{R}(x) = v_{\alpha'}(x') \sigma^{\alpha'}(x', x)$ um campo escalar definido na vizinhança de γ .

Suponha-se então que se move o ponto x para $x + \delta x$. Esta mudança induz uma variação na geodésica β para $\beta + \delta\beta$, que por sua vez provoca uma alteração do ponto onde a nova geodésica intersesta a linha do mundo de $x' \rightarrow x' + \delta x'$, pois os novos pontos têm que permanecer ligados por uma geodésica nula. A variação é de tal forma que uma variação ao longo de γ é descrita por:

$$\delta x^{\alpha'} = v^{\alpha'} \delta \tau_R. \quad (4.65)$$

Pode-se assim calcular o gradiente de \mathcal{R} procurando como este varia sob um deslocamento de x e, conseqüentemente, de x' . A condição de que os novos pontos têm que estar ligados por uma geodésica nula é expressa por:

$$\sigma(x' + \delta x', x + \delta x) = \sigma_{\alpha} \delta x^{\alpha} + \sigma_{\alpha'} \delta x^{\alpha'} = 0. \quad (4.66)$$

Assim,

$$\mathcal{R}(x + \delta x) = \mathcal{R}(x) + \partial_{\beta} \mathcal{R} \delta x^{\beta} = v^{\alpha'}(x' + \delta x') \sigma_{\alpha'}(x' + \delta x', x + \delta x). \quad (4.67)$$

Como $v^{\alpha'}(x' + \delta x') = v^{\alpha'}(x') + v^{\alpha'}_{;\beta'} \delta x^{\beta'}$ e $\sigma_{\alpha'}(x' + \delta x', x + \delta x) = \sigma_{\alpha'}(x', x) + \sigma_{\alpha'\beta'} \delta x^{\beta'} + \sigma_{\alpha'\beta} \delta x^{\beta}$ tem-se em primeira ordem na perturbação:

$$\partial_{\beta} \mathcal{R} = \sigma_{\alpha'\beta} v^{\alpha'} + \left(v^{\alpha'} \sigma_{\alpha'\beta'} + v^{\alpha'}_{;\beta'} \sigma_{\alpha'} \right) \frac{\delta x^{\beta'}}{\delta x^{\beta}}. \quad (4.68)$$

Definindo k , um vetor nulo orientado para o futuro em x cujas componentes são dadas por

$$k_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{\mathcal{R}}, \quad (4.69)$$

com o auxílio da Eq.(4.65), pode-se escrever a Eq.(4.66) como:

$$\delta x^{\beta'} = -v^{\beta'} k_{\gamma} \delta x^{\gamma}. \quad (4.70)$$

Substituindo a Eq.(4.70) na Eq.(4.68) obtêm-se

$$\partial_{\beta} \mathcal{R} = \sigma_{\alpha'\beta} v^{\alpha'} - \left(\sigma_{\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} + \sigma_{\alpha'} a^{\alpha'} \right) k_{\beta}. \quad (4.71)$$

Diferenciando as Eqs.(4.7) e (4.8) tiram-se as identidades:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} k^{\beta} &= k_{\alpha}, \\ \sigma_{\alpha'\beta} k^{\beta} &= \frac{\sigma_{\alpha'}}{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

a partir das quais se encontra também que $\sigma_{\alpha'\beta} v^{\alpha'} k^{\beta} = 1$. Deste último resultado e da Eq.(4.71)

encontra-se a importante relação

$$k^\alpha \partial_\alpha \mathcal{R} = 1. \quad (4.73)$$

É também útil calcular a derivada covariante de k^α . Para tal calcula-se a derivada covariante da quantidade $\mathcal{R}k^\alpha$ e utilizando o resultado da Eq.(4.71) encontra-se:

$$\mathcal{R}k^\alpha{}_{;\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - k^\alpha \sigma_{\gamma'\beta} v^{\gamma'} + \left(\sigma_{\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} + \sigma_{\alpha'} a^{\alpha'} \right) k_\beta k^\alpha. \quad (4.74)$$

Deste resultado encontra-se que k^α satisfaz a equação das geodésicas para um parâmetro afim: $k^\beta k^\alpha{}_{;\beta} = 0$. Da Eq.(4.73) tira-se que o parâmetro afim é \mathcal{R} e, portanto, um deslocamento ao longo da geodésica β é dado então por $dx^\alpha = k^\alpha d\mathcal{R}$. Reescrevendo esta relação no sistema de coordenadas retardadas é possível analisar como variam as coordenadas de x para variações deste ao longo de β . Tendo em conta as Eqs. (4.65) e (4.66) encontra-se

$$d\hat{x}^0 = d\tau_R = -k_\alpha dx^\alpha. \quad (4.75)$$

Fazendo a expansão em primeira ordem de \hat{x}^a e utilizando a Eq.(4.60), por os vetores da base serem transportados de Fermi-Walker ao longo de γ , obtém-se

$$d\hat{x}^a = - \left(\mathcal{R}a^a + e_{\alpha'}^\alpha \sigma^{\alpha'}{}_{;\beta'} v^{\beta'} \right) d\tau_R - e_{\alpha'}^\alpha \sigma^{\alpha'}{}_{;\beta} dx^\beta. \quad (4.76)$$

A relação $dx^\alpha = k^\alpha d\mathcal{R}$ pode agora ser escrita utilizando as Eqs.(4.72), (4.75) e (4.76), obtendo-se: $d\tau_R = 0$ e $d\hat{x}^a = (\hat{x}^a/\mathcal{R}) d\mathcal{R}$, que podem ser integradas diretamente:

$$\begin{aligned} \tau_R &= \text{constante}, \\ \hat{x}^a &= \mathcal{R} \Omega^a (\theta^A), \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde θ^A , com $A = 1, 2$, pode ser visto como dois ângulos que parametrizam o vetor unitário Ω^a independente de \mathcal{R} e τ_R .

Pode-se agora procurar o significado geométrico das coordenadas retardadas. Seja x um ponto na vizinhança convexa de γ descrito no sistema de coordenadas retardadas por $(\tau_R, \theta^A, \mathcal{R})$: a coordenada τ_R seleciona um cone de luz particular, isto é, seleciona o ponto na linha do mundo, x' , cujo cone de luz contém x , desta forma todos os pontos ligados a x' por uma geodésica nula têm a mesma coordenada τ_R ; o vetor unitário $\Omega^a := \hat{x}^a/\mathcal{R}$ é constante ao longo da geodésica nula que liga x a x' , no entanto, este é diferente para cada geodésica nula que parte de x' , desta forma Ω^a seleciona uma única geodésica nula no cone de luz de x' ; a distância retardada \mathcal{R} seleciona um único ponto nesta geodésica, como indica a Fig.(4.1).

Construído o sistema de coordenadas retardadas podem-se agora escrever as componentes de qualquer tensor avaliado em γ neste sistema de coordenadas. Por exemplo, para o tensor de Riemann pode-se escrever a componente $R_{a0b0}(\tau_R) = R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} e_a^{\alpha'} v^{\gamma'} e_b^{\beta'} v^{\delta'}$.

Para finalizar a construção do sistema de Coordenadas Retardadas escrevam-se as Eqs.(4.75) e (4.76) em termos das suas componentes no sistema de coordenadas retardadas. Para tal utilizam-se as expansões de $\sigma_{\alpha'\beta'}$ e $\sigma_{\alpha'\beta}$, dadas pelas Eqs.(4.36) e (4.37), juntamente com as Eqs.(4.64) e (4.69), obtendo-se:

$$\partial_\alpha \tau_R = e_\alpha^0 - \Omega_a e_\alpha^a, \quad (4.78)$$

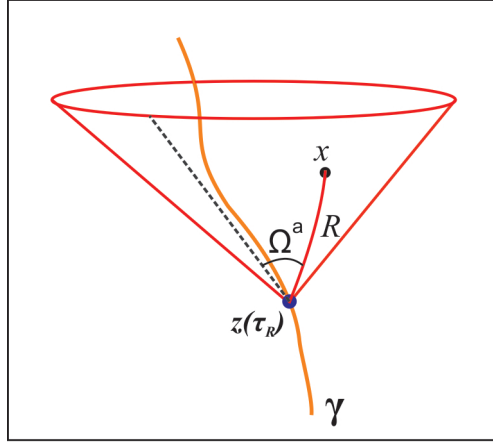


Figura 4.1: Representação gráfica do sistema de coordenadas retardadas.

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \hat{x}^a = & - \left[\mathcal{R}a^a + \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 S^a + O(\mathcal{R}^3) \right] e_\alpha^0 + \\ & + \left[\delta_b^a + \left(\mathcal{R}a^a + \frac{1}{3} \mathcal{R}^2 S^a \right) \Omega_b + \frac{1}{6} \mathcal{R}^2 S_b^a + O(\mathcal{R}^3) \right] e_\alpha^a, \end{aligned} \quad (4.79)$$

Onde se introduziram as combinações

$$\begin{aligned} S_{ab}(\tau_R, \theta^A) &= R_{a0b0} + R_{a0bc} \Omega^c + R_{b0ac} \Omega^c + R_{acbd} \Omega^c \Omega^d = S_{ba}; \\ S_a(\tau_R, \theta^A) &= S_{ab} \Omega^b = R_{a0b0} \Omega^b - R_{ab0c} \Omega^b \Omega^c; \\ S(\tau_R, \theta^A) &= S_a \Omega^a = R_{a0b0} \Omega^a \Omega^b; \end{aligned} \quad (4.80)$$

para simplificar a Eq.(4.79)¹⁰.

¹⁰As expressões em termos das componentes do tensor de Riemann de S_a e S foram simplificadas por invocação da primeira identidade de Bianchi, a qual permite igualmente demonstrar que $R_{abcd} \Omega^b \Omega^c \Omega^d = 0$.

5 Força de Reação em Espaços-tempo Curvos

Introduzidos os conceitos matemáticos está-se em posição de estudar os efeitos de auto-interação no movimento de partículas com massa em espaços-tempo curvos.

Considera-se então uma partícula pontual com massa m que se move numa linha do mundo γ num espaço-tempo curvo sujeita ao seu próprio campo gravitacional mais a ação de um campo externo.

O conceito de uma partícula pontual não faz sentido do ponto de vista da relatividade geral [36]. A dificuldade de fazer sentido de uma “fonte concentrada” deve-se ao facto de o tensor de energia-momento associado a uma partícula pontual divergir o que, tendo em conta as equações de campo de Einstein, implica que a métrica associada a esse tensor de energia-momento é singular na posição da partícula. No entanto, se for possível linearizar as equações de Einstein de modo a dissociar o problema de determinar o campo criado pela partícula e encontrar a lei do movimento, é possível fazer sentido do campo criado por uma partícula pontual e estudar a sua influência no movimento da mesma.

5.1 Equação das Ondas

Considere-se uma partícula pontual com massa m que se move numa linha do mundo γ num espaço-tempo com métrica $g_{\alpha\beta}$.

A métrica $g_{\alpha\beta}$ pode ser vista como a contribuição de um espaço-tempo de fundo com métrica $g'_{\alpha\beta}$, que se assume uma solução de vácuo das equações de Campo de Einstein (EFE) e, uma contribuição devido à presença da partícula, $h_{\alpha\beta}$, considerando para tal que m é pequena, isto é, considerando que a perturbação introduzida pela partícula à métrica de fundo é pequena. Assim:

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (5.1)$$

com $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

Apesar de se considerar que a massa é pequena não houve qualquer restrição na métrica total; $h_{\alpha\beta}$ é a diferença exata entre $g_{\alpha\beta}$ e a métrica de fundo $g'_{\alpha\beta}$.

De modo a subir e descer índices tensoriais em $h_{\alpha\beta}$ utiliza-se a métrica de fundo, tal que $h^{\mu\nu} = g'^{\alpha\mu} g'^{\beta\nu} h_{\alpha\beta}$. Tal corresponde a considerar que a perturbação à métrica é um campo tensorial que se propaga no espaço-tempo de fundo. De igual forma, utiliza-se em todos os cálculos a conexão compatível com a métrica de fundo, exceto indicação contrária.

A Eq.(5.1) pode ser utilizada para calcular os símbolos de Christoffel utilizando a relação:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g'^{\gamma\delta} (g_{\alpha\delta,\beta} + g_{\beta\delta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta}). \quad (5.2)$$

Tendo a expressão para os $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ pode-se encontrar o tensor de Ricci e o escalar de Ricci utilizando as expressões:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} - \Gamma_{\delta\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}, \\ R &= R_{\alpha}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

que permitem encontrar a expressão para o tensor de Einstein dado por:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (5.4)$$

Pretende-se escrever o tensor de Einstein na forma:

$$G_{\alpha\beta} = G'_{\alpha\beta} + \delta G'_{\alpha\beta} + \Delta G'_{\alpha\beta}, \quad (5.5)$$

em que $G'_{\alpha\beta}$ corresponde ao tensor de Einstein do espaço-tempo de fundo que, de acordo com as EFE, é assumido anular-se pois é uma solução do vácuo; $\delta G'_{\alpha\beta}$ contém a contribuição dos termos lineares na métrica perturbadora, designado operador de Einstein linearizado e $\Delta G'_{\alpha\beta}$ contém os restantes termos não lineares.

De modo a encontrar a forma explícita do operador de Einstein linearizado basta utilizar as Eqs.(5.1) a (5.4) em primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$. A aplicação é direta no entanto, bastante longa; utilizou-se assim o software Mathematica com o pacote xAct, mais especificamente, os sub-pacotes xTensor e xPert, para fazer os cálculos e obter o tensor de Einstein em primeira ordem de teoria de perturbações. Tendo-se obtido

$$\delta G'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(h_{\alpha\beta} R' + h_{\gamma;\beta\alpha}^\gamma - h_{\beta;\alpha\gamma}^\gamma - h_{\alpha;\beta\gamma}^\gamma + h_{\alpha\beta}{}^{;\gamma}{}_{;\gamma} \right) + \frac{1}{4} g'_{\alpha\beta} \left[2h^{\gamma\delta} R'_{\gamma\delta} + g'^{\gamma\delta} \left(h_{\rho;\delta\gamma}^\rho - h_{\delta;\gamma\rho}^\rho - h_{\gamma;\delta\rho}^\rho + h_{\delta\gamma}{}^{;\rho}{}_{;\rho} \right) \right]. \quad (5.6)$$

Tendo em conta que a métrica do espaço-tempo de fundo é solução de vácuo das EFE, as quais podem ser escritas na forma [39]:

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right), \quad (5.7)$$

tira-se que $R'_{\alpha\beta} = 0$. Assim, na Eq.(5.6) os termos que dependem do tensor e escalar de Ricci anulam-se.

Definindo uma nova variável

$$\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} [g'_{\gamma\delta} h^{\gamma\delta}], \quad (5.8)$$

e utilizando a regra geral de comutação de derivadas covariantes de um tensor- (r, s) [70]:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta U_{\gamma_1 \dots \gamma_s}^{\sigma_1 \dots \sigma_r} &= \nabla_\beta \nabla_\alpha U_{\gamma_1 \dots \gamma_s}^{\sigma_1 \dots \sigma_r} - \sum_{k=1}^r R^{\sigma_k}{}_{\delta\alpha\beta} U_{\gamma_1 \dots \gamma_s}^{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \delta \sigma_{k+1} \dots \sigma_r} + \\ &+ \sum_{k=1}^s R^\delta{}_{\gamma_k\alpha\beta} U_{\gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \delta \gamma_{k+1} \dots \gamma_r}^{\sigma_1 \dots \sigma_r}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

a Eq.5.6 pode ser simplificada, tal que:

$$\delta G'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(\square \bar{h}_{\alpha\beta} + 2R'_{\gamma\alpha\delta\beta} \bar{h}^{\gamma\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{h}_{\alpha;\gamma\beta}^\gamma + \bar{h}_{\beta;\gamma\alpha}^\gamma - g_{\alpha\beta} \bar{h}^{\rho\delta}{}_{;\rho\delta} \right). \quad (5.10)$$

onde se introduziu o operador de D'Alembert em espaço-tempo curvo $\square := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$, correspondente ao espaço-tempo de fundo.

Dadas as EFE na sua forma mais geral:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (5.11)$$

pode-se utilizar a Eq.(5.5) de modo a reescrever a Eq.(5.11) como

$$\delta G'^{\alpha\beta} = 8\pi T_{eff}^{\alpha\beta}, \quad (5.12)$$

com

$$T_{eff}^{\alpha\beta} := T'^{\alpha\beta} - \Delta G'^{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

Dado que o tensor de Einstein tem divergência nula, cada termo da expansão da Eq.(5.5) tem naturalmente divergência nula pois cada termo tem uma dependência diferente da métrica perturbadora. Desta forma $\delta G'^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Tendo este resultado em conta conclui-se que o tensor de energia-momento

Comece-se por reescrever a segunda identidade de Bianchi: $R_{\delta\sigma\beta\gamma;\alpha} + R_{\delta\sigma\alpha\beta;\gamma} + R_{\delta\sigma\gamma\alpha;\beta} = 0$, contraindo com $g^{\alpha\delta}$, tal que:

$$R_{\gamma\beta\sigma\delta}{}^{;\delta} = R_{\sigma\gamma;\beta} - R_{\sigma\beta;\gamma}, \quad (5.23)$$

que no caso da métrica de fundo $g'_{\alpha\beta}$, indica que $R'_{\gamma\beta\sigma\delta}{}^{;\delta} = 0$, pois o tensor de Ricci associado à métrica do espaço-tempo de fundo é nulo.

Pode-se assim tomar a divergência da Eq.(5.22), de modo a encontrar uma relação entre $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$ e $T_{eff}^{\alpha\beta}$. Por conseguinte, tira-se:

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -16\pi T_{eff}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}. \quad (5.24)$$

A Eq.(5.24) demonstra explicitamente que a conservação de energia-momento implica a condição de gauge adotada, da mesma forma que a condição de gauge da Eq.(5.15) implica a conservação de energia-momento, portanto, as duas imposições são equivalentes.

A separação das EFE numa equação das ondas e uma condição de gauge diretamente ligada à conservação de energia é uma ferramenta extremamente poderosa. Esta separação permite dissociar o problema de obter as componentes da métrica perturbadora, $h_{\alpha\beta}$ e determinar o movimento de uma partícula.

A separação permite resolver, independentemente da escolha de gauge, a equação das ondas para uma partícula que se move numa linha do mundo γ arbitrária; a linha do mundo da partícula é então determinada ao impor a condição de gauge da Eq.5.15. Este facto deve-se a se poder definir a fonte $T_{eff}^{\alpha\beta}$ na Eq.5.22 para uma linha do mundo arbitrária sem ter que se impor de antemão que o tensor de energia-momento efetivo tem que ser conservado, isto é, sem ter que se impor que a linha do mundo γ tenha que ser uma geodésica no espaço-tempo perturbado ¹¹. Desta forma ao resolver a Eq.5.22 obtém-se $h_{\alpha\beta}$ como um funcional de uma linha do mundo arbitrária; como impor a condição de gauge da Eq.5.15 é equivalente a impor a conservação do tensor de energia-momento efetivo determina-se a linha do mundo da partícula forçando-a a ser uma geodésica no espaço-tempo perturbado cuja métrica pode ser então totalmente especificada.

5.2 Formulação Integral das Equações de Campo

Dado que é possível calcular as componentes da métrica perturbadora $h_{\alpha\beta}$ sem saber a linha do mundo da partícula previamente, pode-se começar por procurar soluções para Eq.(5.22). Para tal, é útil utilizar a ideia introduzida na Ref.[65]: apesar das EFE serem não lineares, pode-se considerar que cada elemento de massa que contribui para o tensor de energia-momento $T_{\alpha\beta}$ contribui de forma linear para o campo $g_{\alpha\beta}$, isto é, cada elemento de massa contribui para tensor de energia-momento, tal que: $T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta}$, que, devido às EFE, implica uma variação na métrica: $g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$. Esta ideia corresponde a considerar que a influência das várias fontes no espaço-tempo é propagada linearmente no espaço-tempo total cuja estrutura depende da contribuição das várias fontes.

Esta ideia foi assumida sem explicação ao escrever a Eq.(5.1); de facto, se a influência de cada fonte for suficientemente pequena, isto é, se a massa de cada partícula considerada for suficientemente pequena para que a perturbação que esta induz na métrica do espaço-tempo de fundo seja pequena, não existe qualquer perda de generalidade na forma da Eq.(5.1).

Percebe-se também o porquê da limitação de a métrica de fundo, $g'_{\alpha\beta}$ ser uma solução de vácuo das EFE. Suponha-se o oposto, que a estrutura do espaço-tempo de fundo era definida por uma dada distribuição de matéria para além da partícula pontual. Ao se adicionar a partícula pontual esta vai alterar

¹¹A afirmação de que a conservação de energia-momento implica que a linha do mundo da partícula é uma geodésica será demonstrada mais à frente neste capítulo.

a estrutura do espaço-tempo e é necessário resolver um sistema de equações de forma consistente de modo a contabilizar as influências da partícula pontual na distribuição de matéria e vice-versa. As equações continuam a poder ser linearizadas mas o problema torna-se consideravelmente mais complicado, sendo assim evitado ao se assumir que a métrica de fundo é uma solução de vácuo.

Tendo isto em consideração, a solução da Eq.(5.22) pode ser escrita formalmente [65] como

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(x) = 4 \int G^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') T_{eff}^{\gamma'\delta'}(x') \sqrt{-g'} d^4x', \quad (5.25)$$

onde o fator 4 foi introduzido por conveniência futura e $G^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, que pode ser visto como uma função de Green, representa um funcional que depende da própria métrica, diferindo assim das teorias lineares em que a função de Green está definida *à priori*. Desta forma a Eq.(5.25) representa sem perda de generalidade a solução da Eq.(5.22)¹².

Substituindo a Eq.(5.25) na Eq.(5.22) e tendo em conta a definição do funcional de Dirac invariante dada pelas Eqs.(4.48) tira-se que a função de Green tem que satisfazer:

$$\square G^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') + 2R'_{\gamma'\delta'}{}^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta}_{\gamma'\delta'}(x, x') = -4\pi g_{\gamma'}^{(\alpha}(x, x') g_{\delta'}^{\beta)}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (5.26)$$

de modo a que $\bar{h}^{\alpha\beta}$ verifique a Eq.(5.22). Os propagadores paralelos foram introduzidos no lado esquerdo da Eq.(5.26) de modo a manter a estrutura de índices tensoriais correta.

5.3 Construção das Funções de Green

Pode-se decompor a solução elementar $G^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ em funções de Green avançada $G_A^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, que é não nula se x está no passado causal de x' , e retardada $G_R^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, que é não nula se x está no futuro causal de x' . Esta decomposição é única na vizinhança convexa do ponto base devido à unicidade do problema de Cauchy nessa vizinhança [65]; dessa forma de modo a encontrar uma forma explícita da função de Green assume-se que x se encontra na vizinhança convexa de x' .

Como feito anteriormente ignora-se a solução avançada por esta não ter significado físico dada a sua direta violação do princípio da causalidade.

Pode-se fazer o seguinte ansatz para a forma da função de Green:

$$G_R^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') = U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') \delta_+(\sigma) + V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') \theta_+(-\sigma), \quad (5.27)$$

onde $\delta_+(\sigma)$ e $\theta_+(-\sigma)$ são as distribuições no cone de luz introduzidas anteriormente e $U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ e $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ são bitensores que se assumem infinitamente diferenciáveis.

Repare-se que na Eq.(5.27) se assumiu uma contribuição do interior do cone de luz, o termo $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') \theta_+(-\sigma)$. Esta contribuição deve-se a poderem existir efeitos difusivos na propagação da interação, isto é, contabilizar que possam existir sinais que não mantêm a forma à medida que se propagam formando caudas, sendo este efeito equivalente a uma propagação no interior no cone de luz [67]. O efeito deste termo é representado na Fig.(5.1), que mostra que o potencial num ponto de campo x depende de toda a história passada da partícula.

A forma da Eq.(5.27) é de alguma forma ad hoc mas na realidade não existe nenhum problema em considerar a forma mais geral possível para a função de Green.

¹²Na realidade a solução mais geral seria adicionar a contribuição de um termo de superfície de modo a considerar as contribuições vindas do exterior do volume. No entanto, no caso abordado, esse termo pode ser omitido pois não são contabilizadas mais fontes para o campo gravitacional, para além da partícula pontual que se move num espaço-tempo de fundo.

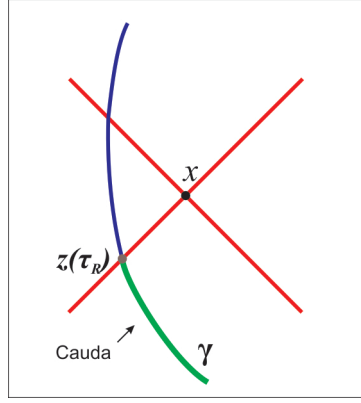


Figura 5.1: Representação da função de Green Retardada.

Continuando, de modo a manipular convenientemente a função de Green adiciona-se uma pequena quantidade ε positiva a σ . Tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ da expressão:

$$G_R^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') = U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') \delta_+(\sigma + \varepsilon) + V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') \theta_+(-\sigma - \varepsilon), \quad (5.28)$$

recupera-se a função de Green.

Substituindo a Eq.(5.28) no lado esquerdo da Eq.(5.26) e tomando o limite obtém-se:

$$\begin{aligned} \square G_R^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') + 2R'_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\beta} G_R^{\gamma\delta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') &= -4\pi\delta_4(x, x') U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} + \delta'_+(\sigma) \{2U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma}\sigma^\gamma + (\sigma_\gamma^\gamma - 4) U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}\} \\ &+ \delta_+(\sigma) \{-2V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma}\sigma^\gamma + (2 - \sigma_\gamma^\gamma) V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} + \square U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} \\ &+ 2R_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\beta} U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}\} + \theta_+(-\sigma) \{\square V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} + 2R_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\beta} V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}\}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde se utilizaram as Eqs.(4.7), (4.54)-(4.59) na simplificação.

Comparando com o lado direito da Eq.(5.26) tiram-se as relações:

$$[U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}] = \delta_{\gamma'}^{(\alpha'} \delta_{\delta'}^{\beta')}; \quad (5.30)$$

$$2U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma}\sigma^\gamma + (\sigma_\gamma^\gamma - 4) U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} = 0; \quad (5.31)$$

que determinam $U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x')$,

$$\tilde{V}^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma}\sigma^\gamma + \frac{1}{2}(\sigma_\gamma^\gamma - 2) \tilde{V}^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} = \frac{1}{2}(\square U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} + 2R_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\beta} U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}) \Big|_{\sigma=0}; \quad (5.32)$$

que determina $\tilde{V}^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, a restrição de $V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}$ ao cone de luz $\sigma(x, x') = 0$; e

$$\square V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} + 2R_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\beta} V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} = 0; \quad (5.33)$$

que determina $V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ no interior no cone de luz.

É possível prosseguir e integrar as equações encontradas para os bitensores $U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}$ e $V^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}$ e obter a sua forma aproximada perto da coincidência.

A Eq.(5.31) pode ser integrada ao longo da geodésica única β que liga x' a x . Esta geodésica é parametrizada por um parâmetro afim λ , tal que um deslocamento ao longo β é descrito por $dx^\alpha = (\sigma^\alpha/\lambda) d\lambda$, de acordo com a Eq.(4.5). Assumindo que $U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma}(x, x')$ pode ser posto na forma $U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') = g^{(\alpha}{}_{\gamma'} g^{\beta)}{}_{\delta'} U(x, x')$ podem-se escrever as Eqs.(5.30) e 5.31 como:

$$[U] = 1, \quad (5.34)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (2 \ln U - \ln \Delta) = 0, \quad (5.35)$$

onde se utilizou a Eq.(4.43) de modo a escrever o termo $\sigma^\lambda - 4 = -\Delta^{-1} \Delta_{,\alpha} \sigma^\alpha$.

Tira-se da Eq.(5.35) que U^2/Δ é constante ao longo de β , portanto, tem que ser igual ao seu valor em x' : $U^2/\Delta = [U^2/\Delta] = 1$, por virtude da Eq.(5.34) e da propriedade $[\Delta] = 1$ do determinante de Van Vleck. Dado que esta relação tem que ser válida para qualquer geodésica que parta de x' , pois o ponto $x \in \mathcal{N}(x')$ não foi especificado, tira-se que a solução única das Eqs.(5.34) e (5.35) é $U(x, x') = \Delta^{1/2}(x, x')$, ou seja,

$$U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x') = g^{\alpha}_{\gamma'}(x, x') g^{\beta}_{\delta'}(x, x') \Delta^{1/2}(x, x'). \quad (5.36)$$

Utilizando o método de expansão covariante introduzido no capítulo anterior a Eq.(5.36) perto da coincidência reduz-se a:

$$U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'} = g^{\alpha}_{\gamma'} g^{\beta}_{\delta'} (1 + O(\lambda^3)), \quad (5.37)$$

onde se considerou a Eq.(4.27) e a expansão $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$ para calcular a expansão perto da coincidência de $\Delta^{1/2}(x, x')$ a partir da Eq.(4.42); não existindo termo de ordem λ^2 pois o tensor de Ricci do espaço-tempo de fundo é nulo em todo o espaço-tempo, em especial em x' .

Diferenciando a Eq.(5.37) obtém-se perto da coincidência:

$$U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta';\varepsilon} = \frac{1}{2} g^{\alpha}_{\gamma'} g^{\beta}_{\delta'} g^{\varepsilon'}_{\varepsilon} \left(R'^{\alpha'}_{\gamma'\varepsilon'\lambda'} \delta^{\beta'}_{\delta'} + R'^{\alpha'}_{\delta'\varepsilon'\lambda'} \delta^{\beta'}_{\gamma'} \right) \sigma^{\lambda'} + O(\lambda^2), \quad (5.38)$$

onde se teve que expandir até primeira ordem pois o coeficiente de ordem zero anula-se por consequência da Eq.(4.28).

Diferenciando a Eq.(5.38) e tendo em conta as propriedades do tensor de Riemann tira-se que $[U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta';\varepsilon\rho}]$ é anti-simétrico no último par de índices, portanto:

$$[\square U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}] = 0. \quad (5.39)$$

Da mesma forma pode-se integrar a Eq.(5.32) ao longo de cada geodésica que gera o cone de luz $\sigma(x, x') = 0$. O valor inicial é obtido tomando o limite de coincidência desta equação. Utilizando as Eqs.(4.9), (5.30) e (5.39) e o resultado $[\sigma^\gamma] = 4$ tira-se

$$[V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}] = \frac{1}{2} \left(R^{\alpha'}_{\gamma'\beta'\delta'} + R^{\beta'}_{\gamma'\alpha'\delta'} \right). \quad (5.40)$$

Em sùmula, a função de Green Retardada pode ser decomposta na forma mais geral possível dada pela Eq.(5.28) assumindo-se a contribuição de um termo $U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}$, com suporte sobre no cone de luz $\sigma(x, x')$; e um termo $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}$, com suporte no interior do cone de luz. Resolvendo a Eq.(5.31) com condições a iniciais dadas pela Eq.(5.30) é possível determinar explicitamente a componente $U^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, Eq.(5.36). As Eqs.(5.32) e (5.33) permitem determinar $\tilde{V}^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, a restrição de $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ ao cone de luz; estes valores podem então ser utilizados como condições iniciais para a Eq.(5.33) e determinar $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$. Apesar de este não constituir um método prático para determinar o bitensor $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$, estas considerações indicam que $V^{\alpha\beta}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ existe e é único por unicidade do problema de Cauchy.

Não é de mais realçar que toda a construção feita nesta secção é válida apenas na vizinhança normal convexa de x' .

5.4 Dinâmica de uma Partícula Pontual em Espaço-tempo Curvo

Obtida a forma da função de Green que aparece na Eq.(5.25) poder-se-ia tentar integrar a equação de onda, Eq.(5.22), para um dado tensor de energia-momento. No entanto, apesar de a formulação feita até agora ser exata, qualquer tentativa de resolução desta equação tem que ser feita utilizando um método iterativo. Aqui reside a única fonte de aproximação no tratamento feito já que o número de iterações envolvidas na integração da equação das ondas é necessariamente finito.

Um método baseado no facto de a massa da partícula ser assumida pequena, de modo a que a perturbação induzida na métrica de fundo seja pequena, é sugerido pela teoria pós-Minkowskiana [72]. O método consiste em fixar na primeira iteração a geodésica e substituir $\bar{h}_0^{\alpha\beta} = 0$ em $T_{eff}^{\alpha\beta}$; em seguida avalia-se o integral na Eq.(5.25), considerando apenas a função de Green retardada pelas razões indicadas anteriormente, retornando a aproximação em primeira ordem $\bar{h}_1^{\alpha\beta}[\gamma] = O(m)$ para a métrica perturbadora. O processo então repete-se, substitui-se $\bar{h}_1^{\alpha\beta}$ em $T_{eff}^{\alpha\beta}$ e, integrando novamente a Eq.(5.25), obtém-se a aproximação em segunda ordem $\bar{h}_2^{\alpha\beta}[\gamma] = O(m, m^2)$ e assim sucessivamente até se obter a aproximação de ordem n : $\bar{h}_n^{\alpha\beta}[\gamma] = O(m, m^2, \dots, m^n)$, desejada. Obtida $\bar{h}_n^{\alpha\beta}$ basta fazer a substituição na Eq.(5.15) e determinar a linha do mundo em ordem m^n .

Descrito o método é natural que se procure a sua implementação em primeira ordem em m . Então, como indicado, fixa-se a linha do mundo da partícula e assume-se a perturbação nula; desta forma $\Delta G^{\alpha\beta} = 0$ e por conseguinte, $T_{eff}^{\alpha\beta} = T'^{\alpha\beta}$.

Para continuar é então necessário escrever o tensor de energia-momento para uma partícula pontual num espaço-tempo curvo. Comece-se por escrever a ação de uma partícula livre num espaço-tempo:

$$S_{particula} = -m \int_{\gamma} ds = -m \int_{\gamma} \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} d\lambda, \quad (5.41)$$

com $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$.

A ação da Eq.(5.41) pode ser escrita em termos de uma densidade Lagrangeana \mathcal{L} tendo em conta que $\rho \rightarrow m\delta_4(x^{\mu}(x) - x^{\mu}(\lambda))$ no caso de uma partícula pontual. Assim:

$$S_{particula} = -m \int \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} \delta_4(x^{\mu} - z^{\mu}(\lambda)) d\lambda d^4x. \quad (5.42)$$

O tensor de densidade de energia-momento $\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} T^{\alpha\beta}$ pode ser obtido a partir da relação

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad (5.43)$$

com a densidade Lagrangeana \mathcal{L} dada por

$$\mathcal{L} = -m \int_{\gamma} \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} \delta_4(x^{\mu} - z^{\mu}(\lambda)) d\lambda. \quad (5.44)$$

Escrevendo $g_{\mu\nu} = g^{\alpha}_{\mu} g^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta}$ pode-se então diferenciar diretamente a Eq.(5.44) e obtém-se o tensor de energia-momento para uma partícula pontual:

$$T^{\alpha\beta}(x) = m \int_{\gamma} \frac{g^{\alpha}_{\mu} g^{\beta}_{\nu} \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu}}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu}}} \delta_4(x, z) d\lambda. \quad (5.45)$$

Obtida a forma do tensor de energia-momento efetivo, em primeira ordem, pode-se então substituir na Eq.(5.25), tal que:

$$\bar{h}_1^{\alpha\beta}(x) = 4m \int G_R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x, z) v^{\mu} v^{\nu} d\tau, \quad (5.46)$$

de onde se obtém a métrica perturbadora válida em primeira ordem em m .

Encontrada a expressão para o tensor de energia-momento para uma partícula pontual pode-se agora procurar como a equação do movimento depende da métrica do espaço-tempo. Foi indicado anteriormente que a conservação de energia-momento implicava que o movimento de um dado corpo seria uma geodésica no espaço-tempo; verifique-se que assim é. Tome-se a divergência da Eq.(5.45):

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= m \int_\gamma \nabla_\beta \left[\frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \delta_4(x, z) \right] d\lambda = \\ &= m \int_\gamma \nabla_\beta \left[\frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \right] \delta_4(x, z) d\lambda + m \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\beta [\delta_4(x, z)] d\lambda,\end{aligned}\quad (5.47)$$

onde se utilizou a regra do produto de modo a obter os dois termos.

Mas, utilizando a Eq.(4.49), a divergência da Eq.(5.45) é também dada por:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= m \int_\gamma \nabla_\beta \left[\frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \delta_4(x, z) \right] d\lambda = \\ &= m \int_\gamma \nabla_\beta \left[\frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \right] g^\beta_\nu \delta_4(x, z) d\lambda - m \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\nu [\delta_4(x, z)] d\lambda.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Desta forma tira-se que

$$m \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\beta [\delta_4(x, z)] d\lambda = -m \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\beta [\delta_4(x, z)] d\lambda,\quad (5.49)$$

ou seja, este termo é igual a zero. Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= m \int_\gamma \nabla_\beta \left[\frac{g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \right] \delta_4(x, z) d\lambda = \\ &= m \int_\gamma \frac{D}{d\lambda} \left[\frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \right] \delta_4(x, z) d\lambda + m \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\beta [g^\beta_\nu \dot{z}^\nu] \delta_4(x, z) d\lambda = 0,\end{aligned}\quad (5.50)$$

onde a última igualdade surge da imposição de conservação de energia-momento.

Tenha-se em conta o segundo termo da soma da Eq.(5.50):

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \nabla_\beta [g^\beta_\nu \dot{z}^\nu] \delta_4(x, z) d\lambda &= \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} g^\beta_{\nu;\beta} \dot{z}^\nu \delta_4(x, z) d\lambda + \\ &+ \int_\gamma \frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} g^\beta_\nu \nabla_\beta [\dot{z}^\nu] \delta_4(x, z) d\lambda.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Os resultados das Eqs.(4.28) e (4.48) implicam que o primeiro termo da soma é zero. O segundo termo é igualmente nulo pois a derivada covariante é tomada num ponto de campo x no entanto, \dot{z}^ν representa o vetor tangente à linha do mundo da partícula num ponto $z(\lambda)$, que em nada depende do ponto de campo considerado. Esta consideração permite então concluir

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = m \int_\gamma \frac{D}{d\lambda} \left[\frac{g^\alpha_\mu \dot{z}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}} \right] \delta_4(x, z) d\lambda = 0,\quad (5.52)$$

de onde se tira

$$\frac{D\dot{z}^\mu}{d\lambda} = k\dot{z}^\mu, \quad (5.53)$$

com

$$k = \frac{1}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu}} \frac{D}{d\lambda} \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu}. \quad (5.54)$$

A Eq.(5.53) não é mais que a equação da geodésica numa parametrização não afim, concluindo-se que a conservação de energia-momento implica que a linha do mundo de uma partícula é uma geodésica no espaço-tempo. Com este resultado pode-se agora perceber o porquê do esforço para manter uma formulação exata do problema do movimento de uma pequena massa num espaço-tempo de fundo, apesar de depois apenas se tentar calcular a métrica perturbadora em primeira ordem em m .

Suponha-se que se partia de uma formulação linear tomando à partida $\Delta G^{\alpha\beta} = 0$ na Eq.(5.12). Como $\delta G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ tem-se então que $T'^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Este resultado implicaria que a linha do mundo da partícula tem que ser uma geodésica no espaço-tempo de fundo e portanto, não existiria qualquer efeito de *self-force*. Mas então, o que difere de tomar posteriormente apenas o termo linear na expansão ou partir diretamente de uma teoria linear? Para responder tem que se analisar a expansão feita. Ao se considerar uma expansão usual, assume-se que toda a dependência da pequena quantidade m é expandida em potências:

$$h_{\alpha\beta}(x, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n h_{\alpha\beta}^{(n)}(x). \quad (5.55)$$

O método introduzido no início desta secção, por outro lado, induz uma série de potências em que cada termo da expansão $h_{\alpha\beta}^{(n)}$ mantém uma dependência na linha do mundo e portanto, uma dependência de m , tal que:

$$h_{\alpha\beta}(x, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n h_{\alpha\beta}^{(n)}(x; \gamma(m)). \quad (5.56)$$

Está então explicado o porquê de manter a formulação exata até esta secção.

Por fim, podem-se escrever as equações do movimento da Eq.(5.53) em termos da métrica do espaço-tempo de fundo. Para tal é necessário definir a relação entre as conexões da métrica do espaço-tempo total $g_{\alpha\beta}$ e da métrica $g'_{\alpha\beta}$. Seja ∇_α a conexão associada à métrica $g_{\alpha\beta}$ e ∇'_α a conexão associada à métrica $g'_{\alpha\beta}$. Pode-se definir um tensor C tal que:

$$\left(\nabla_\gamma - \nabla'_\gamma\right) Y^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha Y^\beta. \quad (5.57)$$

Na Ref.[71] é deduzida a dependência das componentes de C em termos de $g_{\alpha\beta}$, tal que:

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\nabla'_\beta g_{\gamma\delta} + \nabla'_\gamma g_{\beta\delta} - \nabla'_\delta g_{\beta\gamma} \right). \quad (5.58)$$

Escrevendo a métrica do espaço-tempo total como

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + O(m^2), \quad (5.59)$$

e substituindo na Eq.(5.58) obtém-se, em primeira ordem, $C_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\beta;\gamma} + h^\alpha{}_{\gamma;\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{;\alpha})$, em que as derivadas covariantes são relativas à métrica do espaço-tempo de fundo. Pode-se então reescrever o lado esquerdo da Eq.(5.53) como

$$\frac{D\dot{z}^\mu}{d\tau} = \frac{D'v^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} (h^\mu{}_{\nu;\gamma} + h^\mu{}_{\gamma;\nu} - h_{\nu\gamma}{}^{;\mu}) v^\nu v^\gamma + O(m^2), \quad (5.60)$$

onde se escolheu como parâmetro da geodésica o tempo próprio τ medido no espaço-tempo de fundo.

Tendo em conta a expansão na Eq.(5.59) a Eq.(5.54) é dada simplesmente por:

$$k = -\frac{1}{2}h_{\nu\gamma;\rho}v^\nu v^\gamma v^\rho - h_{\nu\gamma}v^\nu a^\gamma + O(m^2), \quad (5.61)$$

onde se utilizou a expansão do logaritmo: $\ln(x) = (x-1) + O(x^2)$ e $a^\mu = D'v^\mu/d\tau$.

Juntando os resultados das Eqs.(5.60) e (5.61) obtém-se a equação do movimento:

$$a^\mu = -\frac{1}{2}(h^\mu{}_{\nu;\gamma} + h^\mu{}_{\gamma;\nu} - h_{\nu\gamma}{}^{i\mu} + v^\mu h_{\nu\gamma;\rho}v^\rho)v^\nu v^\gamma - h_{\nu\gamma}v^\nu a^\gamma + O(m^2). \quad (5.62)$$

Tendo em conta a Eq.(5.62) tira-se que em primeira ordem de teoria de perturbações a quadriaceleração é de ordem m , assim pode-se escrever a equação do movimento, válida em primeira ordem de teoria de perturbações, como:

$$a^\mu = -\frac{1}{2}(h^\mu{}_{\nu;\gamma} + h^\mu{}_{\gamma;\nu} - h_{\nu\gamma}{}^{i\mu} + v^\mu h_{\nu\gamma;\rho}v^\rho)v^\nu v^\gamma. \quad (5.63)$$

Todavia, a Eq.(5.63) é válida apenas formalmente. Os potenciais obtidos da resolução da Eq.(5.46) divergem na linha do mundo da partícula. Para fazer sentido destas equações é necessário regularizar os potenciais, isto é, é necessário fazer sentido do potencial para uma partícula pontual no espaço-tempo.

5.5 Potenciais Retardados

Dado que a função de Green retardada na Eq.(5.46) é válida em todo o espaço-tempo de fundo, esta equação descreve a perturbação no espaço-tempo originada pela partícula em qualquer ponto x . Como visto anteriormente, na vizinhança convexa de x' é possível encontrar uma forma concreta para a equação de Green. Pode-se então especializar a Eq.(5.46) no caso de um ponto x perto da linha do mundo. Suponha-se também que γ atravessa a vizinhança convexa deste ponto, $\mathcal{N}(x)$ e, $\tau_<$ indica o valor do tempo próprio a partir do qual γ entra em $\mathcal{N}(x)$ vinda do passado e $\tau_>$ o valor do tempo próprio a partir do qual γ sai de $\mathcal{N}(x)$ em direção ao futuro, isto é, $z(u) \in \mathcal{N}(x) \quad \forall \tau_< \leq u \leq \tau_>$. Desta forma a Eq.(5.46) pode ser separada em três contribuições, tal que:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\alpha\beta}(x) = & 4m \int_{-\infty}^{\tau_<} G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau + 4m \int_{\tau_<}^{\tau_>} G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau + \\ & + 4m \int_{\tau_>}^{+\infty} G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau, \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde se omitiu o índice em $\bar{h}^{\alpha\beta}(x)$ para não saturar a notação, ficando então implícito que a Eq.(5.64) é válida em primeira ordem de teoria de perturbações.

O terceiro integral anula-se dado que x estaria então no passado de $z(\tau)$ e portanto, $G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) = 0$. A segunda integração é feita na vizinhança convexa de x logo é possível expressar a função de Green na forma da Eq.(5.27):

$$\int_{\tau_<}^{\tau_>} G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau = \int_{\tau_<}^{\tau_>} U^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, x') \delta_+(\sigma) v^\mu v^\nu d\tau + \int_{\tau_<}^{\tau_>} V^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, x') \theta_+(-\sigma) v^\mu v^\nu d\tau. \quad (5.65)$$

De modo a avaliar os integrais na Eq.(5.65) é útil utilizar as coordenadas retardadas descritas anteriormente. Considere-se $x' := z(\tau_R)$ o ponto de interseção entre γ e o cone de luz passado de x .

Pode-se então alterar a variável de interação de τ para σ , para tal, tem que se calcular a variação da função de Synge ao longo da linha do mundo:

$$d\sigma = \sigma(x, z + dz) - \sigma(x, z) = \sigma_\mu v^\mu d\tau, \quad (5.66)$$

utilizando o resultado da Eq.(4.65). Repare-se no entanto, que esta variação nada tem a ver com a variação feita anteriormente na construção das coordenadas retardadas. Apenas se procurou como varia a função de Synge para uma variação de um ponto ao longo da geodésica mantendo o ponto de campo x constante.

Desta forma o resultado da primeira integração é obtido simplesmente por aplicação das propriedades da função delta de Dirac e na segunda integração o limite superior é alterado pela função em degrau; juntando estes resultados obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\alpha\beta}(x) = & \frac{4m}{\mathcal{R}} U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x') v^{\gamma'} v^{\delta'} + 4m \int_{\tau <}^{\tau_R} V^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau + \\ & + 4m \int_{-\infty}^{\tau <} G_R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau, \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde \mathcal{R} representa a distância invariante de x' a x definida na Eq.(4.63).

Como indicado na Eq.(5.63) a aceleração da partícula depende da derivada covariante da métrica. É então necessário tomar a derivada covariante, $\nabla'_{\gamma'}$, da Eq.(5.67); no entanto, tem que se ter em conta que uma variação do ponto de campo x implica uma variação do ponto de base x' dado que estes estão relacionados pela relação $\sigma(x, x') = 0$. Assim, por exemplo, a variação do bitensor $U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'}(x, x')$ é dada por $\delta U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta'} = U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma} \delta x^\gamma + U^{\alpha\beta}{}_{\gamma'\delta';\gamma'} v^{\gamma'} \delta\tau_R$, de acordo com a Eq.(4.65). Por outro lado, nos cálculos ignoram-se todos os termos em que a aceleração venha multiplicada pela massa da partícula pois apenas se procura a aproximação de ordem m e como visto na Eq.(5.63) a aceleração é de ordem m . Desta forma:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) = & -\frac{4m}{\mathcal{R}^2} U_{\alpha\beta\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} \partial_\gamma \mathcal{R} + \frac{4m}{\mathcal{R}} U_{\alpha\beta\alpha'\beta';\gamma} v^{\alpha'} v^{\beta'} + \frac{4m}{\mathcal{R}} U_{\alpha\beta\alpha'\beta';\gamma'} v^{\alpha'} v^{\beta'} v^{\gamma'} \partial_\gamma \tau_R + \\ & + 4m V_{\alpha\beta\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} \partial_\gamma \tau_R + \bar{h}_{\alpha\beta\gamma}^{cauda}(x), \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde o quarto termo da soma aparece da aplicação da fórmula integral de Leibniz e

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta\gamma}^{cauda}(x) = & 4m \int_{\tau <}^{\tau_R} \nabla'_{\gamma'} V_{\alpha\beta\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau + 4m \int_{-\infty}^{\tau <} \nabla'_{\gamma'} G_{R\alpha\beta\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau \\ = & 4m \int_{-\infty}^{\tau_R^-} \nabla'_{\gamma'} G_{R\alpha\beta\mu\nu}(x, z) v^\mu v^\nu d\tau, \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde na segunda igualdade se alterou o limite superior da integração de $\tau_R^- = \tau_R - \varepsilon$, em que ε é uma quantidade positiva infinitesimal, para evitar o comportamento singular da função de Green no cone de luz $\sigma = 0$.

Finalmente está-se em posição de utilizar o sistema de coordenadas retardadas e expandir $\bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x)$ em potências de \mathcal{R} . Para o efeito tem que se decompor o campo numa base ortonormada (e_0^α, e_a^α) definida em x , que se obtém por transporte paralelo da base ortonormada $(v^{\alpha'}, e_0^{\alpha'})$ definida em x' , ao longo da geodésica nula, única, que liga x' a x , como indicado no capítulo anterior.

Para tal são necessários os resultados

$$U_{\alpha\beta\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} = g^{\alpha'}{}_{(\alpha} g^{\beta')}{}_{\beta)} [v_{\alpha'} v_{\beta'} + O(\mathcal{R}^3)], \quad (5.70)$$

que segue da Eq.(5.37);

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta\alpha'\beta';\gamma} v^{\alpha'} v^{\beta'} &= g^{\alpha'}_{(\alpha} g^{\beta')}_{\beta)} g^{\gamma'}_{\gamma} \left[-\mathcal{R} \left(R'_{\alpha'0\gamma'0} + R'_{\alpha'0\gamma'd} \Omega^d \right) v_{\beta'} + O(\mathcal{R}^2) \right], \\ U_{\alpha\beta\alpha'\beta';\gamma'} v^{\alpha'} v^{\beta'} v^{\gamma'} &= g^{\alpha'}_{(\alpha} g^{\beta')}_{\beta)} \left[\mathcal{R} R'_{\alpha'0d0} \Omega^d v_{\beta'} + O(\mathcal{R}^2) \right], \end{aligned} \quad (5.71)$$

que se obtêm diretamente das Eqs.(4.64) e (5.38); e

$$V_{\alpha\beta\alpha'\beta'} v^{\alpha'} v^{\beta'} = g_{(\alpha}^{\alpha'} g_{\beta')}^{\beta} \left[R'_{\alpha'0\beta'0} + O(\mathcal{R}) \right], \quad (5.72)$$

que segue da expansão covariante do bitensor $V_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(x', x)$, em primeira ordem, utilizando para o efeito o resultado da Eq.(5.40).

Será ainda necessário encontrar as componentes dos gradientes de τ_R e \mathcal{R} neste sistema de coordenadas. O primeiro, $\partial_\alpha \tau_R$, é dado pela Eq.(4.78); de modo a encontrar o gradiente de \mathcal{R} utiliza-se a relação $\partial_\alpha \mathcal{R} = \Omega_a \partial_\alpha \hat{x}^a$ e a Eq.(4.79), que permitem deduzir:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathcal{R} &= - \left[\mathcal{R} a^\alpha \Omega_a + \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 S + O(\mathcal{R}^3) \right] e_\alpha^0 + \\ &+ \left[\left(1 + \mathcal{R} a_b \Omega^b + \frac{1}{3} \mathcal{R}^2 S \right) \Omega_a + \frac{1}{6} \mathcal{R}^2 S_a + O(\mathcal{R}^3) \right] e_\alpha^a, \end{aligned} \quad (5.73)$$

em que se podem ignorar os termos que dependem da aceleração, a_a , pois na Eq.(5.68) $\partial_\alpha \mathcal{R}$ vem multiplicado pela massa da partícula.

Juntando estes resultados, a Eq.(5.68) permite escrever as várias componentes de $\bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x)$ em coordenadas retardadas. A sua dedução é, no entanto, de alguma forma extensa dada a quantidade de termos na Eq.(5.68), no entanto, a aplicação é bastante direta, havendo muitos termos que cortam no decorrer da dedução. São então omitidos os resultados intermédios e obtêm-se as expressões finais:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{000}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_0^\alpha(x) e_0^\beta(x) e_0^\gamma(x) = 2m R'_{a0b0} \Omega^a \Omega^b + \bar{h}_{000}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \\ \bar{h}_{0b0}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_0^\alpha(x) e_b^\beta(x) e_0^\gamma(x) = -4m R'_{b0c0} \Omega^c + \bar{h}_{0b0}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \\ \bar{h}_{ab0}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_a^\alpha(x) e_b^\beta(x) e_0^\gamma(x) = 4m R'_{a0b0} + \bar{h}_{ab0}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \\ \bar{h}_{00c}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_0^\alpha(x) e_b^\beta(x) e_c^\gamma(x) = \\ &= -4m \left[\left(\frac{1}{\mathcal{R}^2} + \frac{1}{3} R'_{a0b0} \Omega^a \Omega^b \right) \Omega_c + \frac{1}{6} R'_{c0b0} \Omega^b - \frac{1}{6} R'_{ca0b} \Omega^a \Omega^b \right] + \bar{h}_{00c}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \\ \bar{h}_{0bc}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_0^\alpha(x) e_b^\beta(x) e_c^\gamma(x) = \\ &= 2m \left(R'_{b0c0} + R'_{b0cd} \Omega^d + R'_{b0d0} \Omega^d \Omega_c \right) + \bar{h}_{0bc}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \\ \bar{h}_{abc}(\tau_R, \mathcal{R}, \Omega^a) &:= \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}(x) e_a^\alpha(x) e_b^\beta(x) e_c^\gamma(x) = -4m R'_{a0b0} \Omega_c + \bar{h}_{abc}^{cauda} + O(\mathcal{R}); \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde, por exemplo, $R'_{a0b0}(\tau_R) := R'_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} e_a^{\alpha'} v^{\beta'} e_b^{\gamma'} v^{\delta'}$ e $\bar{h}_{ab0}^{cauda} = \bar{h}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{cauda} e_a^{\alpha'} e_b^{\beta'} v^{\gamma'}$ representam as componentes do tensor de Riemann e da contribuição do interior do cone de luz, respetivamente, avaliados em $x' = z(\tau_R)$.

Como esperado, a deformação do espaço-tempo causado por uma partícula pontual diverge. Pode-se ainda assim tentar fazer sentido dos resultados obtidos na posição da partícula pontual; para tal pode-se tomar a média das várias componentes da métrica ao longo de uma superfície-2 com coordenadas τ_R e \mathcal{R} constantes, $S(\tau_R, \mathcal{R})$:

$$\langle \bar{h}_{abc} \rangle(\tau_R, \mathcal{R}) = \frac{1}{\mathcal{A}} \oint_{S(\tau_R, \mathcal{R})} \bar{h}_{abc}(\tau_R, \mathcal{R}, \theta^A) d\mathcal{A}, \quad (5.75)$$

onde nesta expressão específica se alterou a notação e $a, b, c = 0, 1, 2, 3$. Estas médias corresponderão ao valor médio do campo a uma distância fixa da linha do mundo medido por um observador que se move num referencial momentaneamente em movimento com a partícula.

A superfície $S(\tau_R, \mathcal{R})$ é mapeada pelos ângulos θ^A utilizados para parametrizar o vetor Ω . Uma escolha canónica para esta parametrização é $\Omega^a = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$.

É útil introduzir as quantidades $\Omega_A^a := \partial \Omega^a / \partial \theta^A$ e $\Omega_{AB} := \delta_{ab} \Omega_A^a \Omega_B^b$, que atua como métrica do sub-espaco gerado pelas coordenadas angulares. Destas definições obtém-se a seguinte identidade $\Omega_A^a = \delta_{ab} \Omega^{AB} \Omega_B^b$, a qual obedece à relação $\Omega_A^a \Omega_b^A = \delta_b^a - \Omega^a \Omega_b$.

Resta então calcular a métrica induzida na superfície $S(\tau_R, \mathcal{R})$. Para tal, é necessário inverter as Eqs.(4.78) e (4.79) em função dos vetores da base e então escrever as componentes da métrica. Tal inversão é trabalhosa e muito longa sendo a demonstração remetida para a Ref.[55]. A métrica induzida em $S(\tau_R, \mathcal{R})$ vem então dada por:

$$ds^2 = \mathcal{R}^2 \left[\Omega_{AB} - \frac{1}{3} \mathcal{R}^2 S_{ab} \Omega_A^a \Omega_B^b + O(\mathcal{R}^3) \right] d\theta^A d\theta^B. \quad (5.76)$$

A partir da Eq.(5.76) pode-se encontrar a expressão para o elemento de área em coordenadas retardadas:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \mathcal{R}^2 \left[1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}^2 (S_a^a - S) + O(\mathcal{R}^3) \right] d\Omega \\ &= \mathcal{R}^2 \left[1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}^2 \left(R'_{00} + 2R'_{0a} \Omega^a + R'_{ab} \Omega^a \Omega^b \right) + O(\mathcal{R}^3) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.77)$$

onde, na última igualdade, se utilizou $R_{\alpha\beta\gamma\delta} v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$, que resulta da primeira identidade de Bianchi; e $d\Omega = \sqrt{\Omega_{AB}} d\theta^A d\theta^B$ representa o elemento de ângulo sólido - na parametrização canónica é dado simplesmente por $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Dada esta parametrização é bastante direto verificar os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint \Omega^a d\Omega &= 0; \\ \frac{1}{4\pi} \oint \Omega^a \Omega^b d\Omega &= \frac{1}{3} \delta^{ab}; \\ \frac{1}{4\pi} \oint \Omega^a \Omega^b \Omega^c d\Omega &= 0; \end{aligned} \quad (5.78)$$

que podem ser utilizados para obter $\mathcal{A} = 4\pi \mathcal{R}^2 \left[1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}^2 \left(R'_{00} + R'_{ab} \Omega^a \Omega^b \right) + O(\mathcal{R}^3) \right] = 4\pi \mathcal{R}^2 + O(\mathcal{R}^3)$, em que a ultima igualdade surge do facto de a métrica de fundo ser solução de vácuo das EFE.

Utilizando a Eq.(5.75) de modo a tomar a média de cada uma das componentes das Eqs.(5.74) encontram-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \langle \bar{h}_{000} \rangle &= \bar{h}_{000}^{cada} + O(\mathcal{R}); \\ \langle \bar{h}_{0b0} \rangle &= \bar{h}_{0b0}^{cada} + O(\mathcal{R}); \\ \langle \bar{h}_{ab0} \rangle &= 4m R'_{a0b0} + \bar{h}_{ab0}^{cada} + O(\mathcal{R}); \\ \langle \bar{h}_{00c} \rangle &= \bar{h}_{00c}^{cada} + O(\mathcal{R}); \\ \langle \bar{h}_{0bc} \rangle &= 2m R'_{b0c0} + \bar{h}_{0bc}^{cada} + O(\mathcal{R}); \\ \langle \bar{h}_{abc} \rangle &= \bar{h}_{abc}^{cada} + O(\mathcal{R}). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Os resultados da Eq.(5.79) verificam no limite $\mathcal{R} \rightarrow 0$ a média do campo gravitacional é regular. Como nota, o que foi feito pode ser visto como batota dado que a média do campo numa superfície em torno da partícula com coordenadas τ_R e \mathcal{R} constantes não é o campo sentido por uma partícula pontual, até porque foi provado que tal campo é singular na posição da partícula. No entanto, como indicado já no

primeiro capítulo, uma partícula pontual tem que ser vista como uma distribuição de fontes cujo volume tende para zero; o tratamento feito corresponde de alguma forma a essa ideia mantendo a sua validade do ponto de vista físico.

Tendo em conta os resultados da Eq.(5.79) e a relação $\delta_{\beta'}^{\alpha'} = -v^{\alpha'} v_{\beta'} + e_a^{\alpha'} e_{\beta'}^a$, pode-se reconstruir o campo em x' a partir das suas componentes, tal que:

$$\langle \bar{h}_{\alpha'\beta'\gamma'} \rangle = -4m \left(v_{(\alpha'} R'_{\beta')\delta'\gamma'\rho'} + R'_{\alpha'\delta'\beta'\rho'} v_{\gamma'} \right) v^{\delta'} v^{\rho'} + \bar{h}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{cauda}, \quad (5.80)$$

onde o termo $\bar{h}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{cauda}$ é dado pela Eq.(5.69).

5.6 Equação do Movimento

Finalmente está-se em posição de encontrar o campo criado por uma partícula pontual que se move num espaço-tempo de fundo com métrica $g'_{\alpha\beta}$, a qual é solução de vácuo das EFE e, a partir da Eq.(5.63), determinar a equação do movimento da partícula.

Comece-se então por determinar o campo criado pela partícula. Para tal tem que se inverter a Eq.(5.8), sendo útil o resultado $\bar{h}_{\mu}^{\mu} = -h_{\mu}^{\mu}$, que se tira da mesma equação. Obtém-se então $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - g'_{\mu\nu} \left(g'_{\gamma\delta} \bar{h}^{\gamma\delta} \right) / 2$, que por conseguinte implica:

$$h_{\mu\nu;\lambda} = \bar{h}_{\mu\nu;\lambda} - \frac{1}{2} g'_{\mu\nu} \bar{h}_{\rho;\lambda}^{\rho}. \quad (5.81)$$

Ao Substituir as Eqs.(5.69) e (5.80) na Eq.(5.81) tirar-se:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu;\lambda}^{reg} &= -4m \left(v_{(\mu} R'_{\nu)\delta\lambda\rho} + R'_{\mu\delta\nu\rho} v_{\lambda} \right) v^{\delta} v^{\rho} + h_{\mu\nu\lambda}^{cauda}; \\ h_{\mu\nu\gamma}^{cauda} &= 4m \int_{-\infty}^{\tau_R} \nabla'_{\gamma} \left(G_{R\mu\nu\mu'\nu'} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{R\rho\mu'\nu'} \right) (z(\tau), z(\tau')) v^{\mu'}(\tau') v^{\nu'}(\tau') d\tau'; \end{aligned} \quad (5.82)$$

onde se escreveu $h_{\mu\nu;\lambda}^{reg}$ para indicar o campo regularizado através das médias feitas na secção anterior. Repare-se que na Eq.(5.82) todos os tensores são para ser avaliados num ponto arbitrário $z(\tau)$ da linha do mundo.

Antes de substituir as Eqs.(5.82) na Eq.(5.63), reescreva-se esta equação de uma forma mais compacta:

$$a^{\mu} = -\frac{1}{2} (g'^{\mu\nu} + v^{\mu} v^{\nu}) (2h_{\nu\lambda;\rho} - h_{\lambda\rho;\nu}) v^{\lambda} v^{\rho}. \quad (5.83)$$

Pode-se finalmente substituir as Eqs.(5.82) na Eq.(5.83) e obtém-se a equação do movimento de uma partícula pontual de massa m num espaço-tempo de fundo com métrica $g'_{\alpha\beta}$, válida em primeira ordem em m :

$$\frac{D'v^{\mu}}{d\tau} = -\frac{1}{2} (g'^{\mu\nu} + v^{\mu} v^{\nu}) (2h_{\nu\lambda\rho}^{cauda} - h_{\lambda\rho\nu}^{cauda}) v^{\lambda} v^{\rho}, \quad (5.84)$$

onde, como indicado na dedução da forma da Eq.(5.82), se utilizou a primeira identidade de Bianchi para simplificar a expressão final.

5.7 Resultados e Conclusões

Encontrada a equação do movimento que aparece da resolução das equações de Einstein de uma forma consistente, pode-se fazer a sua aplicação no caso de um espaço-tempo concreto. Todavia, as equações encontradas, em geral, não são possíveis de resolver analiticamente, sendo necessária a utilização de métodos numéricos até no caso relativamente simples de um buraco negro de Schwarzschild

[21]. Pode-se no entanto, aplicar a Eq.(5.84) ao caso ainda mais simples, o caso em que a métrica de fundo é a métrica de Minkowski num espaço-tempo quadridimensional. Neste caso a Eq.(5.22) é dada por

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi T_{eff}^{\alpha\beta}. \quad (5.85)$$

Em primeira ordem na perturbação o tensor de energia-momento efetivo é dado simplesmente por $T_{eff}^{\alpha\beta} = T'^{\alpha\beta}$. Podendo-se simplificar ainda mais a Eq.(5.85) notando que o tensor de energia-momento da partícula pontual é zero em qualquer ponto do espaço-tempo à exceção da posição da partícula. Pode-se então escrever

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.86)$$

que permite determinar a perturbação em qualquer ponto do espaço-tempo que não a posição da partícula.

Tomando o traço da Eq.(5.86) tira-se que $\square \bar{h}^{\rho}_{\rho} = 0$ portanto, na norma de Einstein o campo obedece igualmente a

$$\square h^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.87)$$

Resta então resolver a equação das ondas acima. Faça-se então o ansatz que a solução da Eq.(5.87) tem a forma

$$h^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(k_{\gamma} x^{\gamma}), \quad (5.88)$$

que representa uma onda plana.

Introduzindo a Eq.(5.88) na Eq.(5.87) tira-se que $\eta^{\gamma\delta} k_{\gamma} k_{\delta} h^{\alpha\beta} = 0$, ou seja,

$$k_{\gamma} k^{\gamma} = 0, \quad (5.89)$$

para que a Eq.(5.87) seja satisfeita.

Conclui-se então que a radiação gravitacional emitida pela partícula se propaga à velocidade da luz, isto é, a propagação de ondas gravitacionais é feita ao longo do cone de luz futuro com vértice na posição retardada da partícula. Desta forma, tendo em conta a Eq.(5.84), em primeira ordem de teoria de perturbações, a linha do mundo de uma partícula que se move num espaço-tempo de fundo plano é uma geodésica.

Pode-se também entender que num espaço-tempo de dimensão 4 a contribuição vinda do interior do cone de luz, representada pelo bitensor $V^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x, z)$, é devida à curvatura do espaço-tempo, dado que, no caso curvatura nula, as ondas gravitacionais mantêm a mesma forma propagando-se sempre ao longo do cone de luz futuro da posição retardada da partícula.

6 Conclusões e Futuro

Neste trabalho estudaram-se os efeitos de auto-interações no movimento das partículas.

Na primeira parte desta tese fez-se uma digressão histórica da primeira tentativa de quantificar os efeitos de auto-interação no movimento das partículas. Estudou-se a inclusão destes efeitos na teoria do eletromagnetismo de Maxwell, a qual revelou comportamentos incomportáveis com os dados experimentais e violação de princípios fundamentais da física. As soluções encontradas com pré-acelerações e acelerações infinitas revelam grandes problemas na física clássica que ainda hoje persistem sem resolução aparente.

Na segunda metade prossegue-se o estudo no caso do movimento de partículas com massa em espaços-tempo curvos. Mostrou-se que é possível separar as equações de campo de Einstein numa equação das ondas e numa condição de gauge equivalente à conservação de energia-momento (cf. Eqs.(5.15) e (5.24)). Aliando esta separação à demonstração de que a conservação de energia-momento de uma partícula pontual implica que a sua linha do mundo é sempre uma geodésica do espaço-tempo total, conclui-se que é possível linearizar as equações de Einstein, dissociando o problema de encontrar o campo criado por uma partícula e a determinação do seu movimento.

Os resultados encontrados permitiram regularizar o campo criado por uma partícula pontual e encontrar em primeira ordem a equação do movimento quando vista em termos do espaço-tempo de fundo.

Por fim, fez-se a aplicação dos resultados encontrados ao caso mais simples, uma partícula num espaço-tempo de fundo plano de dimensão 4, concluindo-se que, em primeira ordem, a partícula segue uma geodésica no espaço-tempo, não existindo efeitos corretivos de auto-interação ao movimento da partícula.

No caso geral de um espaço-tempo curvo com métrica $g_{\alpha\beta}$ a análise feita mostra que existem correções já em primeira ordem de teoria de perturbações ao movimento geodésico dos corpos (cf. Eq.(5.84)). A importância destas correções não foi, no entanto, estudada dada a complexidade das equações para o caso de uma métrica de fundo não plana. Será no entanto, de esperar que quanto maior a perturbação induzida maior o efeito de *self-force* e maior o desvio ao movimento geodésico. A verificação desta afirmação teria profundo impacto na forma das ondas gravitacionais procuradas pelos detetores, sendo imperativo calcular as correções vindas da consideração de auto-interações.

O tratamento feito no estudo da *self-force* de origem gravitacional, em que se considera uma partícula com massa que se move num espaço-tempo de fundo, tal que a perturbação na curvatura induzida pela presença da partícula é muito menor que a curvatura do espaço-tempo de fundo, providencia um enquadramento ótimo para o estudo do caso em que um pequeno objeto compacto de massa m - tal como um buraco negro de uma algumas massas solares ou uma estrela de neutrões - orbita um buraco negro super-massivo, como os que se acredita existir no centro das galáxias, designando este fenómeno *Extreme Mass Ratio Inspiral* (EMRI). Este fenómeno representa umas das principais fontes de ondas gravitacionais e daí a grande importância na sua compreensão.

Fazendo uso da Eq.(5.84), Leor Barack e Norichika Sago conseguiram calcular, numericamente, em primeira ordem de teoria de perturbações, os efeitos de *self-force* de origem gravitacional no caso do espaço-tempo de fundo ser Schwarzschild [1, 2], isto é no caso de um campo gravitacional criado por uma massa M , esféricamente simétrica e estática. Entre outros resultados, estes demonstraram que, da consideração de efeitos de *self-force*, a variação do raio da órbita circular estável mais interior (ISCO) é dada por $\Delta r_{isco} = -3,269 m$, na gauge considerada no capítulo 5 (cf. Eq.(5.15)), ou seja, a ISCO é mais interior, como seria de esperar; foi também possível calcular a relação entre a variação da

frequência azimutal da ISCO com a frequência esperada sem considerar efeitos de *self-force*, tal que:

$$\frac{\Delta\Omega_{isco}}{\Omega_{isco}} = 0,4870 m/M,$$

sendo esta quantidade invariante de gauge. Note-se portanto, que a frequência da ISCO aumenta por consideração do efeito de *self-force* de origem gravitacional.

Um cálculo mais realista e de maior utilidade na procura de ondas gravitacionais será o cálculo de considerar EMRIs com rotação, portanto, o corpo massivo ser um buraco negro de Kerr. Desenvolvimentos têm sido feitos nesse sentido [66, 68], utilizando para tal várias técnicas de aproximação comumente utilizadas em Relatividade Geral de modo a calcular nas várias zonas de interesse a trajetória das partículas. A resolução deste problema permitirá construir modelos realistas de EMRIs e assim providenciar as formas de onda das ondas gravitacionais emitidas por tais sistemas, as quais poderiam ser utilizadas por futuros detetores extraterrestres, como o *LISA*, ou detetores terrestres mais avançados que os utilizados hoje em dia.

Outro cálculo que seria interessante seria verificar como depende o efeito de *self-force* da dimensão do espaço-tempo considerado, dado que é sabido que o princípio de Huygens não é válido no caso de dimensões espaciais pares (ver *e.g.* Ref.[67]), será então de esperar correções maiores ao movimento geodésico e uma possibilidade de estudar a existência de dimensões extra.

A Cálculo dos Campos Elétrico e Magnético Retardados

Encontradas as expressões para os potenciais de Liénard-Wiechert:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - \vec{r} \cdot \vec{\beta})}; \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{v}}{c^2} \phi(\vec{r}, t);\end{aligned}\tag{A.1}$$

é possível deduzir a forma para os campos retardados utilizando as equações

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

No entanto, a diferenciação não é direta pois as derivadas presentes na Eq.(A.2) são relativas a quantidades medidas no ponto de campo enquanto as expressões para os potenciais dependem explicitamente de quantidades medidas no ponto retardado da partícula. Têm então que se relacionar a variação do ponto de campo com a variação da posição e tempo retardado da partícula.

Comece-se por calcular o gradiente do potencial escalar

$$\nabla\phi = -\frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(cr - \vec{r} \cdot \vec{v})^2} \nabla(cr - \vec{r} \cdot \vec{v}).\tag{A.3}$$

Tendo em conta a relação $r = c(t - t_r)$ tira-se

$$\nabla r = -c\nabla t_r.\tag{A.4}$$

De modo a calcular o segundo termo é útil expandir na forma

$$\nabla(\vec{r} \cdot \vec{v}) = (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{r} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{r}).\tag{A.5}$$

Pode-se assim avaliar termo a termo da Eq.(A.5). O primeiro termo vem então

$$\begin{aligned}(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v} &= \left(r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}(t_r) = \\ &= r_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + r_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + r_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} = \\ &= \vec{a}(\vec{r} \cdot \nabla t_r),\end{aligned}\tag{A.6}$$

onde $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ é a aceleração da partícula no tempo retardado.

Como

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{r} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{r} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w},\tag{A.7}$$

onde \vec{w} representa o vetor posição retardada da partícula e \vec{r} a posição do ponto de campo, tira-se

$$\begin{aligned}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{r} &= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \\ &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = \vec{v},\end{aligned}\tag{A.8}$$

e

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = \vec{v}(\vec{v} \cdot \nabla t_r),\tag{A.9}$$

deduzido da mesma forma que a Eq.(A.3).

Continuando, o terceiro termo da Eq.(A.5) é dado por

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{z} = \\ &= -\vec{a} \times \nabla t_r.\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Por fim,

$$\nabla \times \vec{r} = \nabla \times \vec{r} - \nabla \times \vec{w}, \quad (\text{A.11})$$

mas $\vec{v}(t_r) = \dot{\vec{w}}(t_r)$, logo

$$\nabla \times \vec{w} = -\vec{v} \times \nabla t_r, \quad (\text{A.12})$$

tal como na Eq.(A.10). E $\nabla \times \vec{r} = 0$.

Juntando todos estes resultados a Eq.(A.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{r} \cdot \vec{v}) &= \vec{a}(\vec{r} \cdot \nabla t_r) + \vec{v} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \nabla t_r) - \vec{r} \times (\vec{a} \times \nabla t_r) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \nabla t_r) = \\ &= \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{a} - v^2) \nabla t_r,\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

onde, na simplificação, se utilizou a identidade do triplo produto externo: $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$.

Utilizando os resultados das Eqs.(A.4) e (A.13) tira-se

$$\nabla \phi = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(rc - \vec{r} \cdot \vec{v})^2} [\vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}) \nabla t_r]. \quad (\text{A.14})$$

Para concluir, é necessário calcular ∇t_r . Tendo em conta (A.4) e expandindo ∇r

$$\begin{aligned}-c\nabla t_r = \nabla r &= \nabla \left(\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}} \nabla(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \\ &= \frac{1}{r} [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{r})].\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

No entanto,

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{r} - \vec{v}(\vec{r} \cdot \nabla t_r), \quad (\text{A.16})$$

enquanto das Eqs.(A.11) e (A.12) se tira

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{v} \times \nabla t_r. \quad (\text{A.17})$$

Assim,

$$-c\nabla t_r = \frac{1}{r} [\vec{r} - \vec{v}(\vec{r} \cdot \nabla t_r) + \vec{r} \times (\vec{v} \times \nabla t_r)] = \frac{1}{r} [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \nabla t_r]. \quad (\text{A.18})$$

Logo

$$\nabla t_r = \frac{-\vec{r}}{rc - \vec{r} \cdot \vec{v}}. \quad (\text{A.19})$$

Juntando todos estes resultados na Eq.(A.14) tira-se

$$\nabla \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \vec{r} \cdot \vec{v})^3} [(rc - \vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} - (c^2 - v^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}]. \quad (\text{A.20})$$

De modo a encontrar o campo elétrico é ainda necessário encontrar a derivada temporal do potencial

vetor. Assim,

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[t - \frac{r}{c} \right] = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} \Leftrightarrow \left[1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t_r} \right] \frac{\partial t_r}{\partial t} = 1, \quad (\text{A.21})$$

calculando a derivada dentro dos parênteses:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t_r} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} \right) = -\frac{1}{2c\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}} \frac{\partial}{\partial t_r} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \\ &= -\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_r} \cdot \vec{r} = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

tira-se

$$\left[1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr} \right] \frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{cr}{cr - \vec{v} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{A.23})$$

O resultado da Eq.(A.23) permite escrever

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_R} \frac{\partial t_R}{\partial t} = \frac{cr}{cr - \vec{v} \cdot \vec{r}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_R}. \quad (\text{A.24})$$

Introduzindo um novo vetor

$$\vec{u} \equiv c\hat{r} - \vec{v}, \quad (\text{A.25})$$

Obtém-se, utilizando os resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{u}} \frac{\partial}{\partial t_R} \left[\frac{\vec{v}}{\vec{r} \cdot \vec{u}} \right] = \\ &= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} \left\{ \frac{\vec{r}}{c} (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{a} - \frac{r\vec{v}}{c} \left(\vec{v} \cdot \vec{u} + 2c \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r} - \vec{r} \cdot \vec{a} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo os resultados das Eqs.(A.20) e (A.26) encontra-se finalmente a expressão para o campo elétrico:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]. \quad (\text{A.27})$$

Pode-se agora completar encontrando uma expressão para o campo magnético. Para tal é necessário encontrar

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\phi \vec{v}) = \frac{1}{c^2} [\phi (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \phi)]. \quad (\text{A.28})$$

O rotacional $\nabla \times \vec{v}$ é dado pela Eq.(A.10) e $\nabla \phi$ pela Eq.(A.20). Assim

$$\nabla \times \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} \vec{r} \times \left[(c^2 - v^2) \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{a} \right]. \quad (\text{A.29})$$

A relação entre parênteses retos na Eq.(A.27) pode ser reescrita como $(c^2 - v^2) \vec{u} + (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{u} - (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{a}$, obtendo-se então uma expressão muito semelhante à expressão entre parênteses na Eq.(A.29). Notando que o produto externo de \vec{r} com \hat{r} é nulo pode-se substituir na Eq.(A.29) \vec{v} por $-\vec{u}$ sem qualquer perda de generalidade. Dessa forma

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.30})$$

B Regra de Synge

Apresenta-se em anexo a demonstração da regra de Synge utilizada no cálculo dos limites de coincidência das derivadas da função de Synge.

Seja x e x' , com $x \in \mathcal{N}(x')$, dois pontos ligados por uma geodésica β descrita pelas relações $z^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim que varia entre λ_0 e λ_1 , tal que $z(\lambda_0) := x'$ e $z(\lambda_1) := x$; e $t^\mu = dz^\mu/d\lambda$ representa o vetor tangente à geodésica.

Considere-se um bitensor arbitrário $\Omega_{AB'}(x, x')$, onde $A = \alpha\dots\beta$ representa qualquer número de índices relativos ao ponto x e $B' = \gamma'\dots\delta'$ representa qualquer número de índices relativos ao ponto x' . Introduzem-se ainda dois vetores : $P^M(z)$ e $Q^N(z)$, definidos ao longo da geodésica β , onde M contém o mesmo número de índices que A e N contém o mesmo número de índices que B' . Estes tensores são arbitrários mas, sem perda de generalidade, assumem-se transportados paralelamente à geodésica β , tal que: $P^A_{;\alpha} t^\alpha = 0$, em x e $Q^B_{;\alpha'} t^{\alpha'} = 0$, em x' . Por fim, define-se o biescalar

$$H(x, x') = \Omega_{AB'}(x, x') P^A(x) Q^{B'}(x'). \quad (\text{B.1})$$

Especificada a geodésica que liga x a x' pode-se considerar H como sendo uma função de λ_0 e λ_1 . Se λ_1 não for muito maior que λ_0 , isto é, se o ponto x estiver numa vizinhança suficientemente pequena de x' , pode-se expandir $H(\lambda_1, \lambda_0)$ como

$$H(\lambda_1, \lambda_0) = H(\lambda_0, \lambda_0) + (\lambda_1 - \lambda_0) \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_0} + \mathcal{O}(\Delta\lambda^2), \quad (\text{B.2})$$

onde $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$.

Da mesma forma, a expansão pode ser feita como

$$H(\lambda_1, \lambda_0) = H(\lambda_1, \lambda_1) - (\lambda_1 - \lambda_0) \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda_0} \right|_{\lambda_0=\lambda_1} + \mathcal{O}(\Delta\lambda^2). \quad (\text{B.3})$$

As Eqs.(B.2) e (B.3) implicam então

$$\frac{d}{d\lambda_0} H(\lambda_0, \lambda_0) = \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda_0} \right|_{\lambda_0=\lambda_1} + \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_0}, \quad (\text{B.4})$$

dado que o lado esquerdo é o limite de $[H(\lambda_1, \lambda_1) - H(\lambda_0, \lambda_0)] / (\lambda_1 - \lambda_0)$ quando $\lambda_1 \rightarrow \lambda_0$. A derivada parcial de H em ordem a λ_0 é igual a $\Omega_{AB';\alpha'} t^{\alpha'} P^A Q^{B'}$ e no limite $[\Omega_{AB';\alpha'}] t^{\alpha'} P^A Q^{B'}$. Da mesma forma, a derivada parcial de H em ordem a λ_1 é igual a $\Omega_{AB';\alpha} t^\alpha P^A Q^{B'}$ e no limite $[\Omega_{AB';\alpha}] t^\alpha P^A Q^{B'}$.

Por outro lado da Eq.(B.1)

$$H(\lambda_0, \lambda_0) = [\Omega_{AB'}] P^A Q^{B'}, \quad (\text{B.5})$$

tomando a derivada em ordem a λ_0 obtém-se

$$[\Omega_{AB'}]_{;\alpha'} t^{\alpha'} P^A Q^{B'}. \quad (\text{B.6})$$

Juntando estes resultados na Eq.(B.4) obtém-se

$$\left\{ [\Omega_{AB'}]_{;\alpha'} - [\Omega_{AB';\alpha'}] - [\Omega_{AB';\alpha}] \right\} t^{\alpha'} P^A Q^{B'} = 0, \quad (\text{B.7})$$

ou seja,

$$[\Omega_{AB'}]_{;\alpha'} = [\Omega_{AB';\alpha'}] + [\Omega_{AB';\alpha}], \quad (\text{B.8})$$

dado que os tensores P^M , Q^N e a direção de β são arbitrários, encontrando-se a regra de Synge.

C Transporte de Fermi-Walker

Comece-se por introduzir o conceito de transporte de Fermi-Walker.

Considere-se uma partícula que se move no espaço-tempo com linha do mundo γ , uma curva do tipo tempo descrita por relações $z^\mu(\tau)$, cujo vetor tangente é dado por $v^\mu = dz^\mu/d\tau$ e o seu vetor aceleração dado por $a^\mu = Dv^\mu/d\tau$.

Por definição, o referencial próprio $S_{0(\tau_R)}$ da partícula é tal que o eixo temporal está alinhado segundo v^μ . $S_{0(\tau_R)}$ é definido ainda por mais três vetores do tipo espaço ortogonais entre si definidos sobre a hipersuperfície normal a v^μ . Estas quatro direções definem uma base cujos quadri-vetores são dados por e_a^μ , em que o índice $a = 0, 1, 2, 3$ identifica cada um dos quadri-vetores da base; estes são tais que:

$$e_0^\mu = v^\mu, \quad (\text{C.1})$$

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}. \quad (\text{C.2})$$

Se a partícula se move com velocidade constante o seu referencial próprio $S_{0(\tau_R)}$ mantém-se inalterado; desta forma a base definida não é alterada ao longo de γ . Por outro lado, no caso de haver aceleração o referencial próprio da partícula varia de ponto para ponto. É necessário então indicar como se constrói $S_{0(\tau_R+\delta\tau_R)}$ a partir de $S_{0(\tau_R)}$.

A regra de transformação tem que ser tal que as Eqs.(C.1) e (C.2) sejam válidas em qualquer instante. Por outro lado, a transformação tem que ser apenas um *boost* de Lorentz infinitesimal com velocidade $\vec{\beta} = \vec{a}_0(\tau) d\tau$, não se contabilizando rotações espaciais de $S_{0(\tau_R+\delta\tau_R)}$ em relação a $S_{0(\tau_R)}$. Mostre-se então que estas imposições são verificadas se os vetores da base verificam a seguinte equação ao longo da linha do mundo:

$$\frac{De_i^\mu}{d\tau} = (v^\mu a_\nu - a^\mu v_\nu) e_i^\nu, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{C.3})$$

A Eq.(C.3) é consistente com a Eq.(C.1) pois leva à identidade $Dv^\mu/d\tau = a^\mu$, onde se utilizou o facto de que a quadri-velocidade é ortogonal à quadri-aceleração.

Por outro lado, quaisquer vetores que verifiquem a Eq.(C.3) mantêm o produto escalar inalterado ao longo da linha do mundo da partícula:

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\tau} (g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu) &= g_{\mu\nu} \frac{D}{d\tau} (A^\mu B^\nu) = B_\mu \frac{D}{d\tau} (A^\mu) + A_\nu \frac{D}{d\tau} (B^\nu) = \\ &= (v_\mu a_\nu - a_\mu v_\nu) (B^\mu A^\nu + A^\mu B^\nu) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde na última igualdade se considerou que a contração de um tensor simétrico com um tensor antisimétrico é nula. Desta forma a Eq.(C.2) também é verificada.

Dado que os quadri-vetores do tipo espaço que constituem a base são ortogonais à quadri-velocidade pode-se escrever

$$\frac{De_a^i}{d\tau} = v^i a_\nu e_a^\nu, \quad a = 1, 2, 3 \quad (\text{C.5})$$

No referencial próprio $S_{0(\tau_R)}$ tem-se: $a^\mu = (0, \vec{a}_0)$, $v^\mu = e_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $e_a^i = (0, \hat{e}_a)$. Assim, a Eq.(C.5) pode-se escrever como:

$$\Delta e_a^0 = a_0 \cdot \hat{e}_a \Delta\tau = \vec{\beta} \cdot \hat{e}_a, \quad (\text{C.6})$$

que não é mais que um *boost* de Lorentz infinitesimal com velocidade $\vec{\beta} = a_0 \Delta\tau$.

A Eq.(C.3) pode ser escrita para um qualquer vetor:

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = (v^\mu a_\nu - a^\mu v_\nu) u^\nu. \quad (\text{C.7})$$

A Eq.(C.7) define o chamado Transporte de Fermi-Walker de um quadrivetor ao longo da linha do mundo de uma partícula. Se a quadriaceleração da partícula for nula recupera-se o transporte paralelo, ou seja, a linha do mundo da partícula passa a ser uma geodésica. No caso de existir aceleração o Transporte de Fermi-Walker indica como os vetores se transformam ao longo da linha do mundo da partícula.

Referências

- [1] Barack, L. e Sago, N., (2009), Gravitational self-force correction to the innermost stable circular orbit of a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 191101.
- [2] Barack, L. e Sago, N., (2010), Gravitational self-force on a particle in eccentric orbit around a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D*, 81, 084021.
- [3] Barack, L., (2001), Gravitational self-force by mode sum regularization, *Phys. Rev. D*, 64, 084021.
- [4] Barack, L., (2009), Gravitational self-force in extreme mass-ratio inspirals, *Class. Quantum Grav.*, 26, 213001.
- [5] Barack, L. e Lousto, C.O., (2002), Computing the gravitational self-force on a compact object plunging into a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D*, 66, 061502.
- [6] Barack, L., Mino, Y., Nakano, H., Ori, A. e Sasaki, M., (2002), Calculating the Gravitational Self-Force in Schwarzschild Spacetime, *Phys. Rev. Lett.*, 88, 091101.
- [7] Barack, L. e Ori, A., (2001), Gravitational self-force and gauge transformations, *Phys. Rev. D*, 64, 124003.
- [8] Barack, L. e Ori, A., (2003), Gravitational Self-Force on a Particle Orbiting a Kerr Black Hole, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 111101.
- [9] Barack, L. e Ori, A., (2003), Regularization parameters for the self-force in Schwarzschild space-time: II. Gravitational and electromagnetic cases, *Phys. Rev. D*, 67, 024029.
- [10] Barack, L. e Sago, N., (2011), Beyond the geodesic approximation: Conservative effects of the gravitational self-force in eccentric orbits around a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D*, 83, 084023.
- [11] Barton, J.L., Lazar, D., Kennefick, D.J., Khanna, G. e Burko, L.M., (2010), Computational efficiency of frequency- and time-domain calculations of extreme mass-ratio binaries: Equatorial orbits, *Phys. Rev. D*, 78, 064042.
- [12] Bertschinger, E., (2002), Tensor Calculus, <http://web.mit.edu/edbert/GR/gr2.pdf>, 26 Agosto 2012.
- [13] Blanchet, L., (2006), Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries, <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-4>, 3 November 2012.
- [14] Blanchet, L., Detweiler, S., Le Tiec, A. e Whiting, B.F., (2010), High-order post-Newtonian fit of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry, *Phys. Rev. D*, 81, 084033.
- [15] Blanchet, L., Detweiler, S., Le Tiec, A. e Whiting, B.F., (2010), Post-Newtonian and numerical calculations of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry, *Phys. Rev. D*, 81, 064004.
- [16] Brizuela, D., Martín-García, J.M. e Marugán, G., (2008), xAct'xPert', <http://www.xact.es/Documentation/English/xPertDoc.nb>, 1 Setembro 2012.
- [17] Burko, L. e Khanna, G., (2007), Accurate time-domain gravitational waveforms for extreme-mass-ratio binaries, *Europhys. Lett.*, 78, 60005.
- [18] Carroll, S. M., (1997), Lecture Notes on General Relativity, <http://preposterousuniverse.com/grnotes/grnotes-six.pdf>, 1 Setembro 2012.

- [19] Casals, M., Dolan, S., Ottewill, A.C. e Wardell, B., (2009), Self-force calculations with matched expansions and quasinormal mode sums, *Phys. Rev. D*, 79, 124043.
- [20] Clarke, C.J.S., (2011), *Encyclopedia of Mathematics*, Synge world function, http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Synge_world_function&oldid=18235, 3 Agosto 2012.
- [21] Cutler, C., Kennefick, D. e Poisson, E., (1994), Gravitational radiation reaction for bound motion around a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D*, 50, 6.
- [22] Detweiler, S., (2008), Consequence of the gravitational self-force for circular orbits of the Schwarzschild geometry, *Phys. Rev. D*, 77, 124026.
- [23] Detweiler, S., (2005), Perspective on gravitational self-force analyses, *Class. Quantum Grav.*, 22, 681–716.
- [24] Detweiler, S. e Poisson, E., (2004), Low multipole contributions to the gravitational self-force, *Phys. Rev. D*, 69, 084019.
- [25] Detweiler, S. e Whiting, B.F., (2003), Self-force via a Green's function decomposition, *Phys. Rev. D*, 67, 024025.
- [26] DeWitt, B.S. e Brehme, R.W., (1960), Radiation Damping in a Gravitational Field, *Ann. Phys. (N.Y.)*, 9, 220.
- [27] Dilão, R., "Distribuições". Instituto Superior Técnico, 16 Outubro 2009, Notas de Aula.
- [28] Dirac, P.A.M., (1938). *Classical Theory of Radiating Electrons*, *Proc. Roy. Soc. London A*167, 148.
- [29] Einstein, A. e Infeld, L., (1949), On the motion of particles in general relativity theory, *Can. J. Math.*, 1, 209.
- [30] Ferraro, R. (2007). *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity, 1st Edition*, Springer Inc., New York.
- [31] Ferris, M.R. e Gratus, J., (2011). The Origin of the Schott Term in the Electromagnetic Self Force of a Classical Point Charge, *J. Math. Phys.*, 52, 092902.
- [32] Fitzpatrick, R., (2006), The electromagnetic energy tensor, <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node128.html>, 1 Abril 2012.
- [33] Gal'tsov, D. V. e Spirin, P., (2004). Radiation reaction reexamined: bound momentum and Schott term, arXiv:hep-th/0405287v1.
- [34] Godinho, L. e Natário, J., (2012), *An Introduction to Riemannian Geometry with Applications to Mechanics and Relativity*, http://www.math.ist.utl.pt/~jnatar/geometria_sem_exercicios.pdf, 3 Agosto 2012.
- [35] Gralla, S.E., Harte, A.I. e Wald, R.M., (2009). Rigorous Derivation of Electromagnetic Self-Force, *Phys. Rev. D*, 80, 024031.
- [36] Geroch, R. e Traschen, J., (1987), Strings and other distributional sources in general relativity, *Phys. Rev. D*, 36, 1017-1031.
- [37] Griffiths, D.J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition, Prentice-Hall Inc, New Jersey.

- [38] Hadamard, J. (2003). Lectures on Cauchy's Problem: In Linear Partial Differential Equations, 1st Edition, Dover Phoenix Editions, New York.
- [39] Henriques, A.B., (2009). *Teoria da Relatividade Geral - Uma Introdução*, 1ª Edição, IST Press, Lisboa.
- [40] Hirata, C. H., (2011), Lecture X: Linearized gravity, <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/lec10.pdf>, 1 Setembro 2012.
- [41] Infeld, L. e Schild, A., (1949), On the Motion of Test Particles in General Relativity, *Rev. Mod. Phys.*, 21, 408–413.
- [42] Jackson, J.D. (1999). *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, John Wiley & Sons Inc, New Jersey.
- [43] Landau, L.D. e Lifshitz, E.M., (1975), *The Classical Theory of Fields: Course of Theoretical Physics*, 4th Edition, Pergamon Press, New York.
- [44] Manasse, F.K. e Misner, C.W., (1963), Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry, *J. Math. Phys.*, 4, 735–745.
- [45] Martín-García, J.M., (2008), xAct's Tensor', <http://www.xact.es/Documentation/PDF/xTensorDoc.nb.pdf>, 1 Setembro 2012.
- [46] Martín-García, J.M., (2008), xTensorRefGuide, <http://www.xact.es/Documentation/PDF/xTensorRefGuide.nb.pdf>, 1 Setembro 2012.
- [47] Mino, Y., (2003), Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole, *Phys. Rev. D*, 67, 084027.
- [48] Mino, Y., Sasaki, M. e Tanaka, T., (1997), Gravitational radiation reaction, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 128, 373–406.
- [49] Mino, Y., Sasaki, M. e Tanaka, T., (1997), Gravitational radiation reaction to a particle motion, *Phys. Rev. D*, 55, 3457–3476.
- [50] Morse, P.M. e Feshbach, M. (1953). *Methods of Theoretical Physics, Part I*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York .
- [51] Natário, J., (2011). *Relativity and Singularities – A Short Introduction for Mathematicians*, arXiv:math/0603190v4.
- [52] Ohashi, A., (2003), Multipole particle in relativity, *Phys. Rev. D*, 68, 4.
- [53] Pfenning, M. J. e Poisson E., (2002), Scalar, electromagnetic, and gravitational self-forces in weakly curved spacetimes, *Phys. Rev. D*, 65, 084001.
- [54] Poisson, E., (1999). *An introduction to the Lorentz-Dirac equation*, arXiv:gr-qc/9912045.
- [55] Poisson, E., Pound, A. e Vega, I., (2011), The Motion of Point Particles in Curved Spacetime, <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-7>.
- [56] Poisson, E., (2004), Retarded coordinates based at a world line and the motion of a small black hole in an external universe, *Phys. Rev. D*, 69, 084007.
- [57] Pound, A., (2010), Self-consistent gravitational self-force, *Phys. Rev. D*, 81, 024023.

- [58] Pound, A., (2010), Singular perturbation techniques in the gravitational self-force problem, *Phys. Rev. D*, 81, 124009.
- [59] Pound, A. e Poisson, E., (2008), Osculating orbits in Schwarzschild spacetime, with an application to extreme mass-ratio inspirals, *Phys. Rev. D*, 77, 044013.
- [60] Quinn, T.C. e Wald, R.M., (1999), Energy conservation for point particles undergoing radiation reaction, *Phys. Rev. D*, 60, 064009.
- [61] Romão, J.C., (2012), Introdução à Teoria de Campo, <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/itc.pdf>, 3 Março 2012.
- [62] Rosenthal, E., (2006), Construction of the second-order gravitational perturbations produced by a compact object, *Phys. Rev. D*, 73, 044034.
- [63] Rosenthal, E., (2006), Second-order gravitational self-force, *Phys. Rev. D*, 74, 084018.
- [64] Sago, N., Barack, L. e Detweiler, S., (2008), Two approaches for the gravitational self force in black hole spacetime: Comparison of numerical results, *Phys. Rev. D*, 78, 124024.
- [65] Sciama, D.W., Waylen, P.C. e Gilman, R.C., (1969), Generally Covariant Integral Formulation of Einstein's Field Equations, *Phys. Rev.*, 187, 1762–1766.
- [66] Shah, A. G., Keidl, T. S., Friedman, J. L., Kim, D. H. e Price, L. R., (2011), Conservative gravitational self-force for a particle in circular orbit around a Schwarzschild black hole in a radiation gauge, *Phys. Rev. D*, 83, 064018.
- [67] Sonogo, S. e Faraoni, V. (1992), Huygens' principle and characteristic propagation property for waves in curved spacetimes, *J. Math. Physics*, 33, 625.
- [68]] Sopena, C. F. e Yunes, N., (2011), New Kludge scheme for the construction of approximate waveforms for extreme mass- ratio inspirals, *Phys. Rev. D*, 84, 124060.
- [69] Steinbauer, R. e Vickers, J.A., (2006), The use of Generalised Functions and Distributions in General Relativity, *Class. Quantum Grav.*, 23, R91–R114.
- [70] Viaclovsky, J. A., (2007), Math 865, Topics in Riemannian Geometry, <http://pt.scribd.com/doc/25834757/21/Commuting-covariant-derivatives>, 22 Setembro 2012.
- [71] Wald, R.M. (1984). *General Relativity*, 1st Edition, The University of Chicago Press, Chicago.
- [72] Walker, M. e Will, C. M., (1980), The Approximation of Radiative Effects in Relativistic Gravity: Gravitational Radiation Reaction and Energy Loss in Nearly Newtonian Systems, *The Astrophysical Journal*, 242, 129-133.